

Ο ρόλος των Στοχαστικών Μαθηματικών στο Λύκειο

Αναστάσιος Σκουρκέας
2^ο Πρότυπο Λύκειο Θεσσαλονίκης
«Λευκός Πύργος»

Τα Στοχαστικά Μαθηματικά στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών
Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
ΠΔΕ Αττικής, Τρίτη 10 Μαΐου 2022



Τα Στοχαστικά Μαθηματικά...μέχρι σήμερα



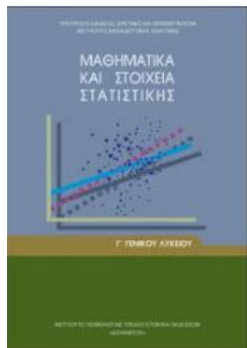
Εποχή των δεσμών:



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο: Πιθανότητες	
6.1	Δειγματικός χώρος — Ενδεχόμενα
6.2	Η έννοια της πιθανότητας
6.3	Συνδυαστική
6.4	Το θεώρημα του διωνύμου
6.5	Δεσμευμένη πιθανότητα
6.6	Ανεξάρτητα ενδεχόμενα
6.7	Δοκιμές Bernoulli

- Δειγματικοί χώροι & Ενδεχόμενα
- Η έννοια της Πιθανότητας

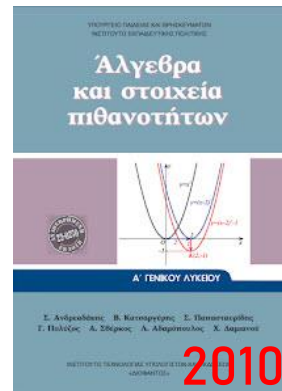
Εποχή των κατευθύνσεων:



- Βασικές έννοιες στατιστικής
- Παρουσίαση στ. δεδομένων
- Μέτρα θέσης & Διασποράς
- Γραμμική παλινδρόμηση και συσχέτιση
- Δειγματικοί χώροι & Ενδεχόμενα
- Η έννοια της Πιθανότητας
- Συνδυαστική
- Δεσμευμένη πιθανότητα & ανεξάρτητα ενδεχόμενα



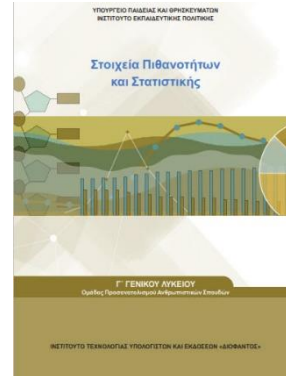
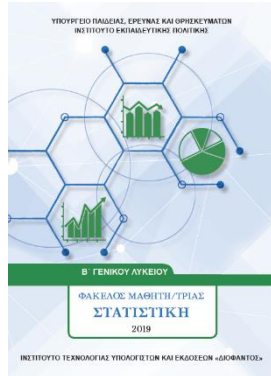
- Στοιχεία Περιγραφικής Στατιστικής
- Συνδυαστική & Πιθανότητες
- Κατανομές Πιθανότητας (τ.μ., σ.π.π., σ.α.κ. για διακριτές και συνεχείς τ.μ., κ.α.)
- Ειδικές διακριτές και συνεχείς κατανομές (Bernoulli, Γεωμετρική, Διωνυμική, Poisson, Υπεργεωμετρική, Κανονική και τυποποιημένη κανονική, Student, χ^2 , ΚΟΘ, κ.α.)
- Εκτιμητική: Διαστήματα εμπιστοσύνης και έλεγχοι υποθέσεων (μονόπλευροι, αμφίπλευροι)



Τα Στοχαστικά Μαθηματικά...μέχρι σήμερα



Εποχή των προσανατολισμών:



(Άλγεβρα – Στατιστική (ΝΠΣ Β Λυκ))

- Πληθυσμός – Δείγμα – Μεταβλητές
- Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων
- Μέτρα θέσης & Μεταβλητότητας

2020: Μαθηματικά Γ.Π. (κόντρα μάθημα) Πιθανότητες

- Πειράματα τύχης, δειγματικός χώρος & ενδεχόμενα
- Πιθανότητες: Ορισμοί & εφαρμογές
- Πιθανότητες με πράξεις με ενδεχόμενα
- Συνδυαστική και Πιθανότητες

Στατιστική

- Πληθυσμός – Δείγμα – Μεταβλητές
- Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων
- Μέτρα θέσης & Μεταβλητότητας, Θηκόγραμμα, Συντελεστής μεταβλητότητας
- Κανονική κατανομή και εφαρμογές
- Πίνακες Συνάφειας και Ραβδογράμματα
- Σύγκριση ποσοτικών χαρακτηριστικών στις κατηγορίες ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού
- Γραμμική συσχέτιση ποσοτικών μεταβλητών και διαγράμματα διασποράς

Τα Στοχαστικά Μαθηματικά... από σήμερα



Θεματικό Πεδίο III: Στοχαστικά Μαθηματικά



Στατιστική (Σ)



Διαχείριση
δεδομένων
(Δ)



Μέτρα θέσης &
μεταβλητότητα
(Μ)



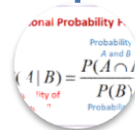
Σχέσεις
εξάρτησης δύο
μεταβλητών
(Ε)



Πιθανότητες (Π)



Πειράματα
τύχης και
πιθανότητες
(Π)



Συσχέτιση
(Σ)

A τάξη Γενικού Λυκείου

Πιθανότητες

Π.Μ.Α: [Π.(Π/Σ).10. 1..2..3...]

Από το γυμνάσιο: κλασικός ορισμός πιθανότητας σε π.τ. με ισοπίθανες εκβάσεις
βασική αρχή απαρίθμησης

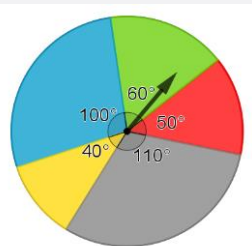
Εδώ:

- ☐ Μέθοδοι προσδιορισμού δειγματικών χώρων (δενδροδιαγράμματα, διαγράμματα Venn, πίνακες διπλής εισόδου,)
- ☐ Ενδεχόμενα και σχέσεις αυτών με τη γλώσσα των συνόλων
- ☐ Μη ισοπίθανα ενδεχόμενα
- ☐ Γενικός ορισμός πιθανότητας (Αξιωματικός)
- ☐ Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων



A τάξη Γενικού Λυκείου

Πιθανότητες
Ενδεικτικά έργα



Έργο 1: Στο σχήμα φαίνεται ένας δίσκος, χωρισμένος σε χρωματισμένους κυκλικούς τομείς.

Ο δίσκος χρησιμεύει σε ένα παιχνίδι με τους εξής κανόνες:

Κάθε παίκτης επιλέγει ένα χρώμα και ένας από όλους περιστρέφει το βέλος με δύναμη.

Το βέλος σταματάει την περιστροφή του.

Νικητής είναι ο παίκτης που είχε επιλέξει το χρώμα του τομέα που σταμάτησε το βέλος.

Αν το βέλος σταματήσει μεταξύ δύο τομέων, τότε θεωρούμε ότι βρίσκεται στον τομέα που είναι το μεγαλύτερο μέρος του. Αν σταματήσει έτσι ώστε να μην είναι φανερό σε ποιον τομέα βρίσκεται το μεγαλύτερο μέρος του, η περιστροφή του βέλους επαναλαμβάνεται.

Προσπαθήστε να μοντελοποιήσετε το πείραμα τύχης που περιγράφεται παραπάνω, ορίζοντας κατάλληλο δειγματοχώρο και στη συνέχεια βρείτε την πιθανότητα να κερδίσει κάθε παίκτης, σε σχέση με το χρώμα που επέλεξε.

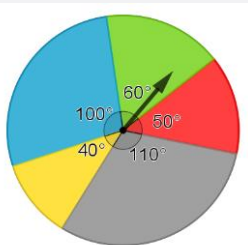


A τάξη Γενικού Λυκείου

Πιθανότητες
Διδακτική διαχείριση

Προσπαθήστε να **μοντελοποιήσετε** το πείραμα τύχης που περιγράφεται παραπάνω, ορίζοντας κατάλληλο δειγματοχώρο και στη συνέχεια βρείτε την πιθανότητα να κερδίσει κάθε παίκτης, σε σχέση με το χρώμα που επέλεξε.

- ✓ Η ερμηνεία που θέλουμε να καλλιεργήσουμε στους μαθητές μας είναι αυτή της **υποκειμενικής πιθανότητας**.
- ✓ Για κάθε πείραμα τύχης, πραγματικό ή νοητικό, που μας ενδιαφέρει, θέλουμε να φτιάξουμε ένα **μαθηματικό μοντέλο**.
- ✓ Το **μοντέλο** αυτό θα πρέπει να περιγράφει τι μπορεί να συμβεί ως αποτέλεσμα του πειράματος τύχης (**δειγματοχώρος**) και πόσο πιθανό θεωρούμε να συμβεί κάθε τι που μπορεί να συμβεί (**πιθανότητα**).



A τάξη Γενικού Λυκείου

Πιθανότητες
Διδακτική διαχείριση

Λύση

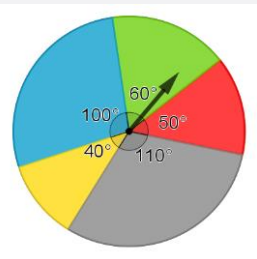
«Το βέλος σταματάει στο χρώμα X» να είναι ανάλογη της επίκεντρης γωνίας του τομέα χρώματος X.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, $\omega_i \rightarrow$ σε ένα από τα πέντε χρώματα του δίσκου, με πιθανότητα

$$p_i = \frac{\text{οι μοίρες του τομέα που αντιστοιχεί στο } \omega_i}{360^\circ}$$

Προτάσεις

- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, $\omega_i \rightarrow$ σε ένα από τα πέντε χρώματα του δίσκου, με πιθανότητα ...?
- Μια μαθήτρια αντιστοίχησε πιθανότητα 0.2 σε καθένα από τα ω_i : Σ ή Λ και γιατί;
- Ένας μαθητής αντιστοίχησε πιθανότητα 60° στο $\omega_{\text{πράσινο}}$: Σ ή Λ και γιατί;



A τάξη Γενικού Λυκείου

Πιθανότητες
Διδακτική διαχείριση

Ερωτήματα:

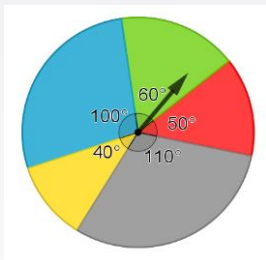
α) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου το βέλος να σταματήσει στο γκρι χωρίο;

β) Να συγκρίνετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

$A = \{\text{το βέλος σταματά στο κίτρινο χωρίο}\}$

$B = \{\text{το βέλος σταματά στο κόκκινο χωρίο}\}$

γ) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου το βέλος να σταματήσει στο πράσινο ή το γαλάζιο χωρίο;



A τάξη Γενικού Λυκείου

Πιθανότητες

Ενδεικτικά έργα
Διδακτική διαχείριση

Έργο 2:

Η πιθανότητα να πάει μια οικογένεια για διακοπές στην Κύπρο είναι 0,2, να πάει στην Ελλάδα είναι 0,3 και η πιθανότητα να πάει τουλάχιστον σε μία από τις δύο χώρες είναι 0,4.

Να βρείτε την **πιθανότητα** η οικογένεια να:

- α) να πάει και στις δύο χώρες.
- β) να πάει μόνο στην Ελλάδα.



A τάξη Γενικού Λυκείου

Στατιστική

Π.Μ.Α: [Σ.(Δ/Μ/Ε).10.1..2..3...]

Από το γυμνάσιο:

είδη δεδομένων (συνεχή ποσοτικά και χρονικά)

τρόποι οργάνωσης δεδομένων (πίνακες απόλυτων και σχετικών συχνοτήτων, ομαδοποιήσεις)

τρόποι αναπαράστασης δεδομένων (ραβδογράμματα, κυκλικά διαγράμματα, ιστογράμματα, απλά θηκογράμματα, χρονοδιαγράμματα)

μέτρα θέσης (επικρατούσα τιμή, μέση τιμή, διάμεσος) και τεταρτημόρια

μέτρα μεταβλητότητας (εύρος και ενδοτεταρτημοριακό εύρος)

Εδώ:

❑ Σχέσεις εξάρτησης μεταξύ ποσοτικού και κατηγορικού χαρακτηριστικού

- ❑ Θηκογράμματα – Απόμακρες τιμές
- ❑ Μέτρα θέσης & μεταβλητότητας + συντ. μεταβλητότητας των τιμών του ποσοτικού στις στάθμες του κατηγορικού χαρακτηριστικού
- ❑ Συγκρίσεις με θηκογράμματα
- ❑ Σχέσεις ποσοτικού και κατηγορικού χαρακτηριστικού που δεν είναι απαραίτητα αιτίας – αιτιατού



A τάξη Γενικού Λυκείου



Επιμόρφωση και
Παιagogική Εφαρμογή
στα Προγράμματα Σπουδών

Στατιστική

Ενδεικτικά έργα
Διδακτική διαχείριση

Έργο 3

Δύο μεγάλες εταιρείες, μία αμερικάνικη και μία ευρωπαϊκή, λαμβάνουν υπηρεσίες και από εξωτερικούς συνεργάτες εκτός από τους υπαλλήλους τους (π.χ. εκπόνηση μελετών, υπηρεσίες φύλαξης, ταχυδρομικές, κτλ). Επιλέγουμε τυχαία δύο δείγματα από αμοιβές εξωτερικών συνεργατών (ένα για κάθε εταιρεία) που δόθηκαν γι' αυτόν το σκοπό. Παρακάτω δίνονται οι δειγματικές μέσες τιμές και οι δειγματικές τυπικές αποκλίσεις.

- ο Α (αμερικάνικη εταιρεία): $\bar{x}_A = 700$ δολάρια και $s_A = 80$ δολάρια
- ο Ε (ευρωπαϊκή εταιρεία): $\bar{x}_E = 550$ ευρώ και $s_E = 125$ ευρώ

α) Να συγκρίνετε τα δύο δείγματα ως προς τη μεταβλητότητα και να σχολιάσετε.

- ✓ Υπολογίζουν εκείνα τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που θεωρούν κατάλληλα για να αξιοποιήσουν στη σύγκριση των δύο δειγμάτων ως προς τη μεταβλητότητα.
- ✓ Γίνεται μια συζήτηση για το μέτρο του CV.
- ✓ Πολλοί μαθητές μπορούν να αναρωτηθούν για ποιο λόγο δεν συγκρίνουμε απλά τις τυπικές αποκλίσεις ή τις διασπορές.
- ✓ Αναμένουμε να γίνει συζήτηση για την ομοιογένεια των δειγμάτων και να απαντήσουν ότι το δείγμα από την αμερικάνικη εταιρεία είναι πιο ομοιογενές από το δείγμα της ευρωπαϊκής εταιρείας, δεδομένου ότι $CV_A < CV_E$.

Μαθηματικές διεργασίες
και πρακτικές



A τάξη Γενικού Λυκείου



Επιμόρφωση και
Πιλοτική Εφαρμογή
στο πρόγραμμα ΣΠΟΥΔΩΝ

Στατιστική

Διδακτική διαχείριση

Έργο 3 β) Οι δύο εταιρείες αναλαμβάνουν η κάθε μια από ένα έργο που θα τους αποφέρει αρκετά κέρδη. Για να επιβραβεύσουν τους συνεργάτες τους, η αμερικάνικη εταιρεία αποφάσισε να προσθέσει στην αμοιβή κάθε συνεργάτη 250 δολάρια και η ευρωπαϊκή εταιρεία να αυξήσει τη μηνιαία αμοιβή κάθε συνεργάτη κατά 40%. Να συζητήσετε στο τμήμα σας εάν θα επηρεαστεί η μεταβλητότητα των δύο δειγμάτων μετά τις αυξήσεις.

- ✓ Οι μαθητές καλούνται να συζητήσουν για τις πιθανές μεταβολές που μπορεί να επιφέρει μια αύξηση των αμοιβών των συνεργατών κάθε εταιρείας.
- ✓ Βοηθητικό ερώτημα: Θα παραμείνει το δείγμα της αμερικάνικης εταιρείας πιο ομοιογενές από το δείγμα της ευρωπαϊκής; Οι μαθητές μπορούν να εικάσουν τι θα συμβεί και καλούνται να το συζητήσουν στις ομάδες τους. Ο εκπαιδευτικός σε αυτή τη φάση δρα ως διευκολυντής και καθοδηγεί τις ομάδες.



A τάξη Γενικού Λυκείου



Επιμόρφωση και
Πιλοτική Εφαρμογή
στο πρόγραμμα ΣΠΟΥΔΩΝ

Στατιστική

Διδακτική διαχείριση

Έργο 3

Υπενθυμίζεται ότι αν $x_1, x_2, \dots, x_v$ οι τιμές μιας μεταβλητής X με μέση τιμή $\bar{x}$ και

- προσθέσουμε σε αυτές μια σταθερά $\alpha \neq 0$, τότε

$$y_1 = x_1 + \alpha, y_2 = x_2 + \alpha, \dots, y_v = x_v + \alpha \rightarrow \bar{y} = \bar{x} + \alpha \text{ και } s_y = s_x.$$

- πολλαπλασιάσουμε τις τιμές με μια σταθερά $\alpha \neq 0$, τότε

$$y_1 = \alpha \cdot x_1, y_2 = \alpha \cdot x_2, \dots, y_v = \alpha \cdot x_v \rightarrow \bar{y} = \alpha \cdot \bar{x} \text{ και } s_y = |\alpha| \cdot s_x.$$

- μεταβληθούν έτσι ώστε

$$y_1 = \alpha \cdot x_1 + \beta, y_2 = \alpha \cdot x_2 + \beta, \dots, y_v = \alpha \cdot x_v + \beta, \beta \in \mathbb{R} \rightarrow \bar{y} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta \text{ και } s_y = |\alpha| \cdot s_x.$$

- ✓ Η μεταβλητότητα δεν επηρεάζεται, καθώς ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι ανεξάρτητος της νομισματικής μονάδας (δολάρια ή ευρώ).

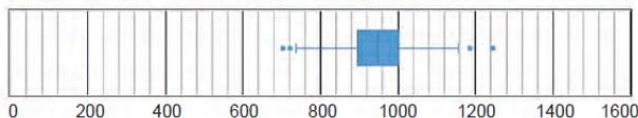


A τάξη Γενικού Λυκείου

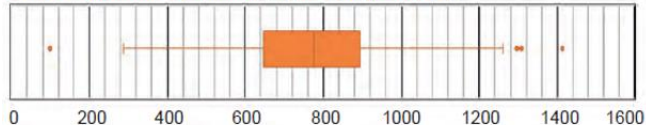
Έργο 3

γ) Συζητήστε στο τμήμα σας, τρόπους, με τους οποίους μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα θηκογράμματα (γράφημα 1) και τους πίνακες των αμοιβών (Πίνακας 1), μετά τις αυξήσεις για τις αμοιβές, σε δολάρια και ευρώ, της αμερικάνικης και της ευρωπαϊκής εταιρείας, που φαίνονται παρακάτω για να σχολιάσετε τη μεταβλητότητα στις αμοιβές των δύο εταιρειών.

Για το δείγμα των αμοιβών της αμερικάνικης εταιρείας



Για το δείγμα των αμοιβών της ευρωπαϊκής εταιρείας



- ✓ Αρχικά, μπορούμε να ζητήσουμε από τους μαθητές να εντοπίσουν στο θηκόγραμμα κάθε εταιρείας τα στατιστικά μέτρα που δίνονται στους πίνακες και να γράψουν (έστω και προφορικά) μια μικρή αναφορά για την κάθε εταιρεία.

	Αμερικάνικη εταιρεία	Ευρωπαϊκή εταιρεία
$Q_1 \rightarrow$	894,8	647,9
$\delta \rightarrow$	947,1	776,1
$Q_3 \rightarrow$	1000,5	893,8
Απόμακρες τιμές	720,7 , 704,3 , 1188,5 , 1243,5	97,7, 1296,5, 1307,35, 1411,9

B τάξη Γενικού Λυκείου

Πιθανότητες

Π.Μ.Α: [Π.(Π/Σ).11. 1..2..3...]

- ☐ Συνδυαστική (αρχές απαρίθμησης, διατάξεις με επανάληψη και χωρίς, μεταθέσεις, συνδυασμοί)
- ☐ Συνδυαστικές μέθοδοι για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων
- ☐ Η Κανονική κατανομή και επίλυση προβλημάτων
- ☐ Δεσμευμένη Πιθανότητα

Στατιστική

Π.Μ.Α: [Σ.(Δ/Μ/Ε).11. 1..2..3...]

- ☐ Σχέσεις εξάρτησης δύο κατηγορικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού

- ☐ Πίνακες συνάφειας απόλυτων και σχετικών συχνοτήτων
- ☐ Στοιβαγμένα ραβδογράμματα απόλυτων συχνοτήτων
- ☐ Ομαδοποιημένα ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων
- ☐ Σχέσεις κατηγορικών χαρακτηριστικών που δεν είναι απαραίτητα αιτίας - αιτιατού



B τάξη Γενικού Λυκείου

Έργο 4

Σε μια μελέτη που αφορά τη χρήση ζώνης ασφαλείας από οδηγούς ηλικίας 18 – 24 ετών συλλέχθηκε πληροφορία από 198 οδηγούς αναφορικά με το φύλο (**χαρακτηριστικό A**) τους και το αν είχαν ή όχι κάποιο τροχαίο ατύχημα τα τελευταία πέντε χρόνια (**χαρακτηριστικό B**). Τα δεδομένα της έρευνας δίνονται στον επόμενο **πίνακα συνάφειας** συχνοτήτων:

		Τροχαίο Ατύχημα (B)		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Φύλο (A)	Άνδρες	69	58	127
	Γυναίκες	27	44	71
	Σύνολο	96	102	198



B τάξη Γενικού Λυκείου

Στατιστική

Ενδεικτικά έργα
Διδακτική διαχείριση

α) Να εξετάσετε την ύπαρξη εξάρτησης μεταξύ των δύο χαρακτηριστικών A και B του προβλήματος, χρησιμοποιώντας κατάλληλο πίνακα συνάφειας συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων ως προς το σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος ή ως προς το πλήθος των παρατηρήσεων του χαρακτηριστικού A ή ως προς το πλήθος των παρατηρήσεων του χαρακτηριστικού B.

		Τροχαίο Ατύχημα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Φύλο	Ανδρες	69	58	127
	Γυναίκες	27	44	71
	Σύνολο	96	102	198



		Τροχαίο Ατύχημα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Φύλο	Ανδρες	54,3%	45,7%	100%
	Γυναίκες	38%	62%	100%
	Σύνολο			



		Τροχαίο Ατύχημα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Φύλο	Ανδρες	34,9%	29,3%	64,2%
	Γυναίκες	13,6%	22,2%	35,8%
	Σύνολο	48,5%	51,5%	100%



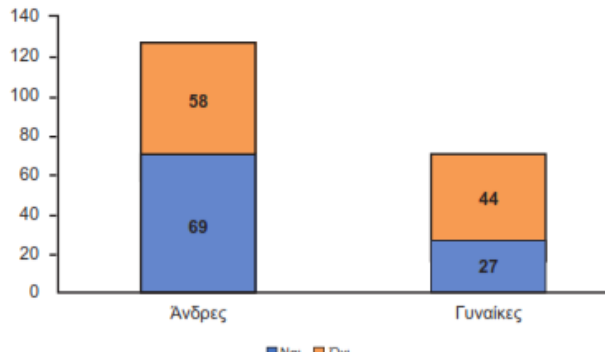
		Τροχαίο Ατύχημα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Φύλο	Ανδρες	71,9%	56,9%	
	Γυναίκες	28,1%	43,1%	
	Σύνολο	100%	100%	



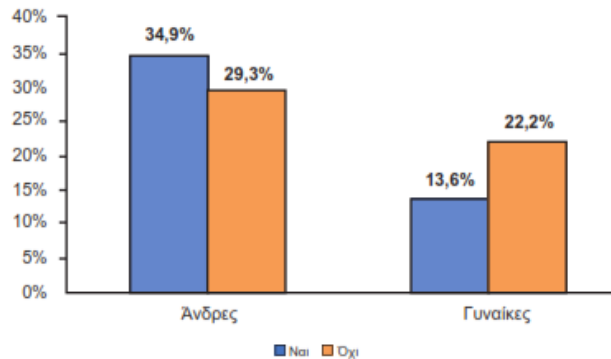
B τάξη Γενικού Λυκείου

Στατιστική
Ενδεικτικά έργα
Διδακτική διαχείριση

β) Να επιλέξετε κατάλληλο διάγραμμα για να αναπαραστήσετε τις σχετικές συχνότητες των πινάκων συνάφειας που χρησιμοποιήσατε στο α) ερώτημα.



Στοιβαγμένο/Συσσωρευμένο
ραβδόγραμμα (stacked)



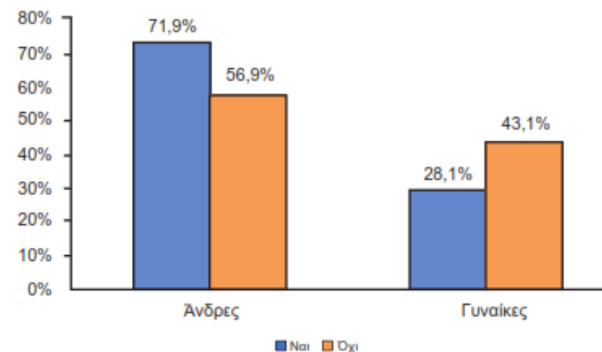
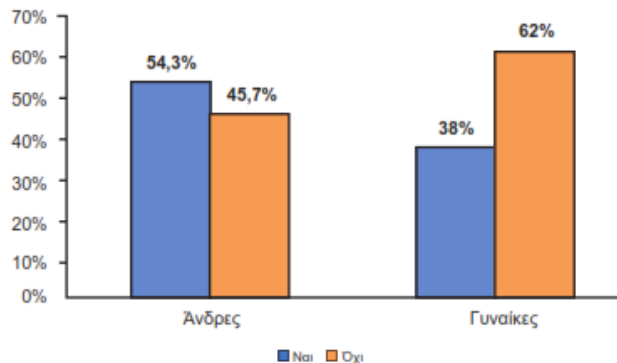
Ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα
(clustered)



B τάξη Γενικού Λυκείου

Στατιστική
Ενδεικτικά έργα
Διαδραστική διαχείριση

β) Να επιλέξετε κατάλληλο διάγραμμα για να αναπαραστήσετε τις σχετικές συχνότητες των πινάκων συνάφειας που χρησιμοποιήσατε στο α) ερώτημα.



γ) Συζητήστε στην ομάδα σας και γράψτε ένα μικρό κείμενο με τα συμπεράσματά σας σχετικά με την ύπαρξη ή μη συσχέτισης μεταξύ του φύλου και της εμπλοκής σε τροχαίο ατύχημα. Στη συνέχεια, συζητήστε στην ολομέλεια του τμήματος, τα πλεονεκτήματα των διαφορετικών προτάσεων των ομάδων.



B τάξη Γενικού Λυκείου

Πιθανότητες

Ενδεικτικά έργα

Διδακτική διαχείριση

(σύνδεση με το προηγούμενο)

Έργο 5

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

- $A : \{\text{η οδηγός να είναι γυναίκα}\}$
- $B : \{\text{ο/η οδηγός είχε τροχαίο ατύχημα τα τελευταία 5 έτη}\}$

		Τροχαίο Ατύχημα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Φύλο	Άνδρες	69	58	127
	Γυναίκες	27	44	71
	Σύνολο	96	102	198

Παραδοχή: τα 198 στοιχεία του Ω είναι ισοπίθανα

Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο από το δείγμα:

α) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου A ;

$$P(A) = \frac{71}{198} \approx 35.9\%$$

β) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου B ;

$$P(B) = \frac{96}{198} \approx 48.5\%$$

γ) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου :

{η οδηγός να είναι γυναίκα με δεδομένο ότι είχε τροχαίο ατύχημα τα τελευταία 5 έτη}

$$P(A/B) = \frac{27}{96} \approx 28.1\% \neq P(A \cap B) = \frac{27}{198} \approx 13.6\%$$



Γ τάξη Γενικού Λυκείου

Πιθανότητες

Π.Μ.Α: [Π.(Π/Σ).12Π. 1..2..3...]

- ☐ Πολλαπλασιαστικός κανόνας
- ☐ Δεσμευμένη πιθανότητα και ανεξαρτησία ενδεχομένων
- ☐ Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας και επίλυση προβλημάτων
- ☐ Θεώρημα Bayes και επίλυση προβλημάτων
- ☐ Δοκιμές Bernoulli (υπολογίζουμε την πιθανότητα να έχουμε k επιτυχίες σε μια σειρά από n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli)

Στατιστική

Π.Μ.Α: [Σ.(Δ/Μ/Ε).12Π. 1..2..3...]

☐ Σχέσεις εξάρτησης δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού

- ☐ Διάγραμμα διασποράς
- ☐ Γραμμική συσχέτιση (εποπτικά και με τον συντ. του Pearson)
- ☐ Χάραξη της ευθείας (μοντέλου) που προσαρμόζεται καλά στα δεδομένα
- ☐ Ερμηνεία συντελεστών του μοντέλου και εξοικείωση με την «πρόβλεψη»
- ☐ Προσδιορισμός της ευθείας παλινδρόμησης (με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων)
- ☐ Σχέσεις ποσοτικών χαρακτηριστικών που δεν είναι απαραίτητα αιτίας – αιτιατού



Γ τάξη Γενικού Λυκείου

Πιθανότητες



Πολλαπλασιαστικός κανόνας, Δεσμευμένη πιθανότητα και ανεξαρτησία ενδεχομένων

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να επικαιροποιήσουμε το αρχικό μας μοντέλο, ώστε να ενσωματώσουμε την πληροφορία ότι το ενδεχόμενο B συνέβη.

Το A είναι **ανεξάρτητο** του B = το πόσο πιθανό θεωρούμε το A, **δεν επηρεάζεται** από το ενδεχόμενο B.

$$P(A/B) = P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

$$P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

Πολλαπλασιαστικός νόμος των πιθανοτήτων



Γ τάξη Γενικού Λυκείου

Πιθανότητες
Ενδεικτικά έργα



Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, Θεώρημα Bayes και επίλυση προβλημάτων

Ο δ.χ. Ω διαμερίζεται σε δύο συμπληρωματικά σύνολα A και A' . Η πιθανότητα του ενδεχομένου B του Ω :

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας
$$P(B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(A') \cdot P(B/A')$$

Θεώρημα Bayes

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(A) \cdot P(B/A) + P(A') \cdot P(B/A')}$$

Έργο 6

Μια εργαστηριακή εξέταση έχει σκοπό την ανίχνευση ενός σοβαρού νοσήματος στους ανθρώπους. Το νόσημα εμφανίζεται στον πληθυσμό με πιθανότητα $1/50.000$. Όπως συμβαίνει με κάθε εξέταση, το αποτέλεσμα της συγκεκριμένης εξέτασης μπορεί να μην είναι σωστό.

- Το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι «**ψευδώς θετικό**» (η εξέταση δείχνει λανθασμένα ότι νοσεί) με πιθανότητα $1/1000$.
- Το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι «**ψευδώς αρνητικό**» (η εξέταση αποτυγχάνει να εντοπίσει το νόσημα) με πιθανότητα $1/10000$.



Γ τάξη Γενικού Λυκείου

Πιθανότητες

Ενδεικτικά έργα
Διδακτική διαχείριση

Έργο 6

- α) Ποια είναι η πιθανότητα ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία από τον πληθυσμό να κάνει την εξέταση και να βγει το αποτέλεσμα θετικό;
β) Να βρείτε την πιθανότητα το παραπάνω άτομο (του α)) να νοσεί πράγματι από την ασθένεια αυτή;

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

- Y : {το άτομο που επιλέγεται να είναι υγιές}
- Θ : {το τεστ που κάνει το άτομο να είναι θετικό}

$$P(Y) = 1 - \frac{1}{50.000} = \frac{49.000}{50.000} = 0.98$$

$$P(\Theta / Y) = \frac{1}{1000}$$

$$P(\Theta' / Y') = \frac{1}{10.000}$$

α) **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας**

$$\begin{aligned} P(\Theta) &= P(Y) \cdot P(\Theta / Y) + P(Y') \cdot P(\Theta / Y') \\ &= 0.98 \cdot 0.001 + 0.02 \cdot 0.9999 = 0.021 \end{aligned}$$

β) **Θεώρημα Bayes**

$$P(Y' / \Theta) = \frac{P(Y') \cdot P(\Theta / Y')}{P(\Theta)} = \frac{0.02 \cdot 0.9999}{0.021} = 0.9522 = 95.22\%$$



Γ τάξη Γενικού Λυκείου

επέκταση

Πιθανότητες

Ενδεικτικά έργα

Διδακτική διαχείριση

- ✓ Η εξέταση αυτή παρέχεται δωρεάν από τα δημόσια νοσοκομεία και το κόστος της είναι 1 ευρώ ανά εξέταση. Μια εταιρεία έχει κατασκευάσει μια παρόμοια διαγνωστική εξέταση με πιθανότητα ψευδώς αρνητικού αποτελέσματος $1/1.000$ και πιθανότητα ψευδώς θετικού αποτελέσματος $1/1.000.000$. Η εταιρεία ισχυρίζεται ότι η νέα εξέταση δίνει πολύ σπανιότερα λάθος αποτέλεσμα και την κοστολογεί 100 ευρώ. Ποια εξέταση θα συμβουλευάτε τον/την Υπουργό Υγείας να επιλέξει;"



Δοκιμές Bernoulli (Jacob Bernoulli, 1645-1705)

Τα πειράματα τύχης αποτελούνται από μια σειρά επαναλήψεων του αρχικού πειράματος: **δοκιμές**.

Απλούστερη δοκιμή: διακρίνουμε **E** (επιτυχία) και **A** (αποτυχία) με πιθανότητες: **p** και **1-p**, αντίστοιχα.

Οι **δοκιμές** είναι μεταξύ τους **ανεξάρτητες**.

Σε **n** **δοκιμές Bernoulli** με πιθανότητα επιτυχίας **p** και **1-p**, η πιθανότητα να έχουμε **k** επιτυχίες:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\dots,n$$



Γ τάξη Γενικού Λυκείου

Πιθανότητες

Ενδεικτικά έργα

Διδακτική διαχείριση

Έργο 7

Ένας/μία μαθητής/τρια απαντά σε ένα ηλεκτρονικό quiz αξιολόγησης στα Μαθηματικά 8 ερωτήσεων. Κάθε ερώτηση συνοδεύεται από τρεις απαντήσεις εκ των οποίων μια είναι η σωστή. Επιτρέπεται να επιλεγθεί μια απάντηση. Εάν ο/η μαθητής/τρια επιλέξει εντελώς τυχαία μια απάντηση σε κάθε ερώτηση, να βρείτε την **πιθανότητα** ο/η μαθητής/τρια να απαντήσει σωστά:

- σε 6 ακριβώς ερωτήσεις
- τουλάχιστον σε 6 ερωτήσεις
- το πολύ σε 5 ερωτήσεις

Πρόκειται για 8 δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας: $p = \frac{1}{3}$

Η πιθανότητα ο/η μαθητής/τρια να απαντήσει σωστά σε 6 **ακριβώς** ερωτήσεις:

$$P(X=6) = \binom{8}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^{8-6} \approx 0.017$$

Η πιθανότητα ο/η μαθητής/τρια να απαντήσει σωστά **τουλάχιστον** σε 6 ερωτήσεις:

$$P(X \geq 6) = P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) = \binom{8}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^{8-6} + \binom{8}{7} \left(\frac{1}{3}\right)^7 \left(\frac{2}{3}\right)^{8-7} + \binom{8}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^8 \left(\frac{2}{3}\right)^{8-8} \approx 0.02$$

Η πιθανότητα ο/η μαθητής/τρια να απαντήσει σωστά **το πολύ** σε 5 ερωτήσεις:

$$P(X \leq 5) = 1 - P(X \geq 6) \approx 1 - 0.02 = 0.98$$



Γ τάξη Γενικού Λυκείου

Στον επόμενο πίνακα δίνονται τα προσδόκιμα ζωής γυναικών (Π.Ζ.Γ.) και ανδρών (Π.Ζ.Α.) του έτους 2005 για 30 τυχαία επιλεγμένες χώρες:

Χώρα	Π.Ζ.Γ.	Π.Ζ.Α.	Χώρα	Π.Ζ.Γ.	Π.Ζ.Α.
Αίγυπτος	63	60	Λευκορωσία	76	66
Αυστρία	79	73	Λιθουανία	77	68
Αφγανιστάν	44	45	Μαλαισία	72	66
Βέλγιο	79	73	Μποτσουάνα	66	60
Βολιβία	64	59	Νησιά Μπαρμπάντος	78	73
Δομινικανή Δημοκρατία	70	66	Νιγηρία	57	54
Ελ Σαλβαδορ	69	64	Νικαράγουα	67	61
Ελλάδα	80	75	Ολλανδία	81	75
Ζάμπια	45	44	Περου	67	63
Ινδία	59	58	Ρωσία	74	64
Ισημερινός	73	67	Σενεγάλη	58	55
Καμερούν	58	55	Σομαλία	55	54
Καναδάς	81	74	Τανζανία	45	41
Κίνα	69	67	Τσεχία	77	69
Κουβέιτ	78	73	Χιλή	78	71

Έργο 8



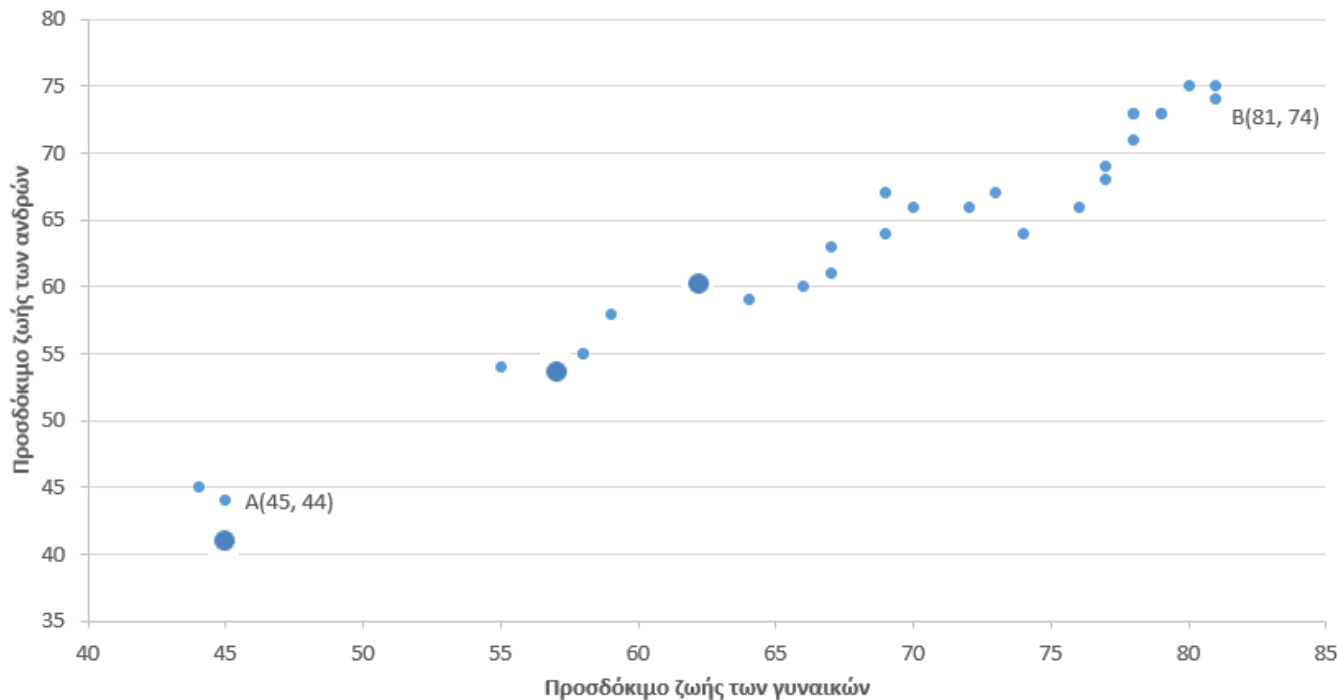
Γ τάξη Γενικού Λυκείου

Στατιστική

Ενδεικτικά έργα

Διδακτική διαχείριση

α) Το επόμενο διάγραμμα **οπτικοποιεί** τον παραπάνω πίνακα. Μπορείτε να εξηγήσετε τον τρόπο με τον απεικονίστηκαν οι χώρες σε αυτό: Να **συμπληρώσετε** τα στοιχεία για τις χώρες της Αιγύπτου, της Νιγηρίας και της Τανζανίας. Πώς **φαντάζεστε** ότι μπορεί να ονομάζεται το διάγραμμα αυτό;

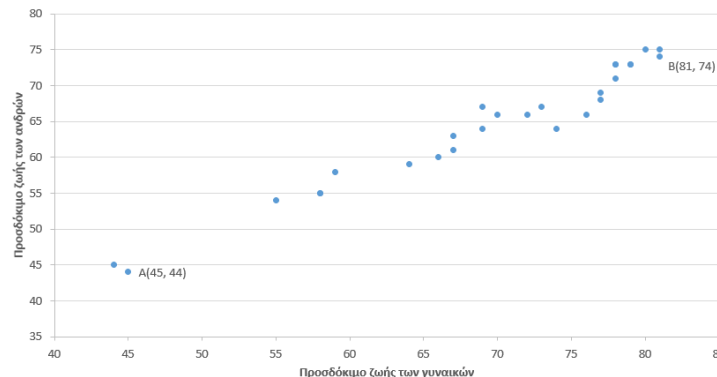


Γ τάξη Γενικού Λυκείου

Στατιστική
Ενδεικτικά έργα
Διαδραστική διαχείριση

β) Να περιγράψετε τη σχέση των δύο εμπλεκόμενων μεταβλητών μας μέσα από το παραπάνω διάγραμμα διασποράς. Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των προσδόκιμων ζωής γυναικών και ανδρών.

Χώρα	Π.Ζ.Γ.	Π.Ζ.Α.	Χώρα	Π.Ζ.Γ.	Π.Ζ.Α.
Αίγυπτος	63	60	Λευκορωσία	76	66
Αυστρία	79	73	Λιθουανία	77	68
Αφγανιστάν	44	45	Μαλαισία	72	66
Βέλγιο	79	73	Μποτσουάνα	66	60
Βολιβία	64	59	Νησιά Μπαρμπάντος	78	73
Δομινικανή Δημοκρατία	70	66	Νιγηρία	57	54
Ελ Σαλβαδόρ	69	64	Νικαράγουα	67	61
Ελλάδα	80	75	Ολλανδία	81	75
Ζάμπια	45	44	Περου	67	63
Ινδία	59	58	Ρωσία	74	64
Ισημερινός	73	67	Σενεγάλη	58	55
Καμερούν	58	55	Σομαλία	55	54
Καναδάς	81	74	Τανζανία	45	41
Κίνα	69	67	Τσιχία	77	69
Κουβέιτ	78	73	Χιλή	78	71



Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{s_x s_y}}, -1 \leq r \leq 1$$

$$\bar{x} = 67,97, \bar{y} = 63,1, s_x = 10,93, s_y = 9,16$$



$$r = 0.98$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i y_i = 131611$$



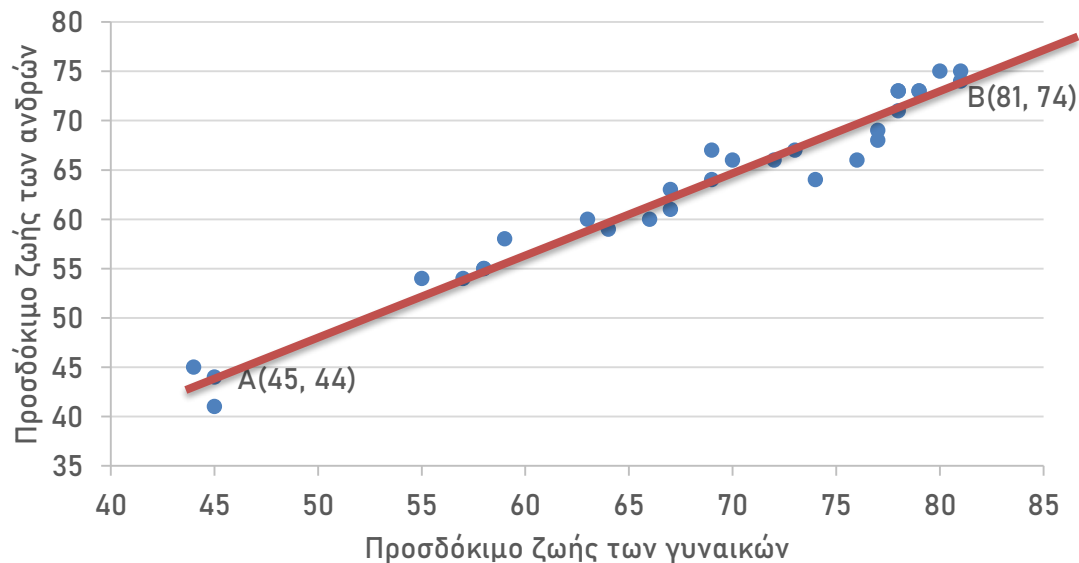
Γ τάξη Γενικού Λυκείου

Στατιστική

Ενδεικτικά έργα

Διδακτική διαχείριση

γ) Να σχεδιάσετε «με το μάτι» την ευθεία (το μοντέλο) που φαίνεται να προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα. Να ερμηνεύσετε τις τιμές των συντελεστών της ευθείας που βρήκατε.



$$\begin{cases} y_A = \alpha + \beta x_A \\ y_B = \alpha + \beta x_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} 44 = \alpha + 45\beta \\ 74 = \alpha + 81\beta \end{cases}$$

$$y = 6.5 + 0.83x$$

- ✓ Η ευθεία που κατά τη γνώμη μας προσαρμόζεται καλύτερα στα σημεία του διαγράμματος διασποράς διέρχεται από το σημείο (0, 6.5) και έχει συντελεστή διεύθυνσης 0.83

Γ τάξη Γενικού Λυκείου

Στατιστική
Ενδεικτικά έργα
Διδακτική διαχείριση

δ) Συζητήστε, μεταξύ σας, πώς μπορείτε να εκτιμήσετε το προσδόκιμο ζωής των ανδρών της Αλβανίας, αν γνωρίζετε ότι για την Αλβανία, το προσδόκιμο ζωής των γυναικών είναι τα 75 έτη. Αν το προσδόκιμο ζωής των γυναικών μιας άλλης χώρας ήταν τα 92 έτη, θα μπορούσατε να εκτιμήσετε το προσδόκιμο ζωής των ανδρών αυτής της χώρας; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

$$y = 6.5 + 0.83x = 6.5 + 0.83 \cdot 75 = 68.75 \simeq 69$$

- ✓ Την εξίσωση της ευθείας μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να εκτιμήσουμε μια τιμή της μεταβλητής Y , από κάποια τιμή της μεταβλητής X που ανήκει στο εύρος τιμών της τελευταίας. Αυτό συμβαίνει, διότι -για τιμές μικρότερες ή μεγαλύτερες από αυτές που παρατηρήθηκαν- δεν είμαστε σίγουροι ότι η γραμμική σχέση παραμένει.
- ✓ Η θετική συσχέτιση μεταξύ Π.Ζ.Γ και Π.Ζ.Α. δεν μπορεί να αποδοθεί σε αιτιακή σχέση μεταξύ των Π.Ζ.Γ και Π.Ζ.Α., αλλά στην ύπαρξη συγχυτικών παραγόντων όπως, το επίπεδο διαβίωσης, το ΑΕΠ, την ποιότητα των υπηρεσιών υγείας κάθε χώρας, κ.τ.λ., που επηρεάζουν και τα δύο προσδόκιμα ζωής.

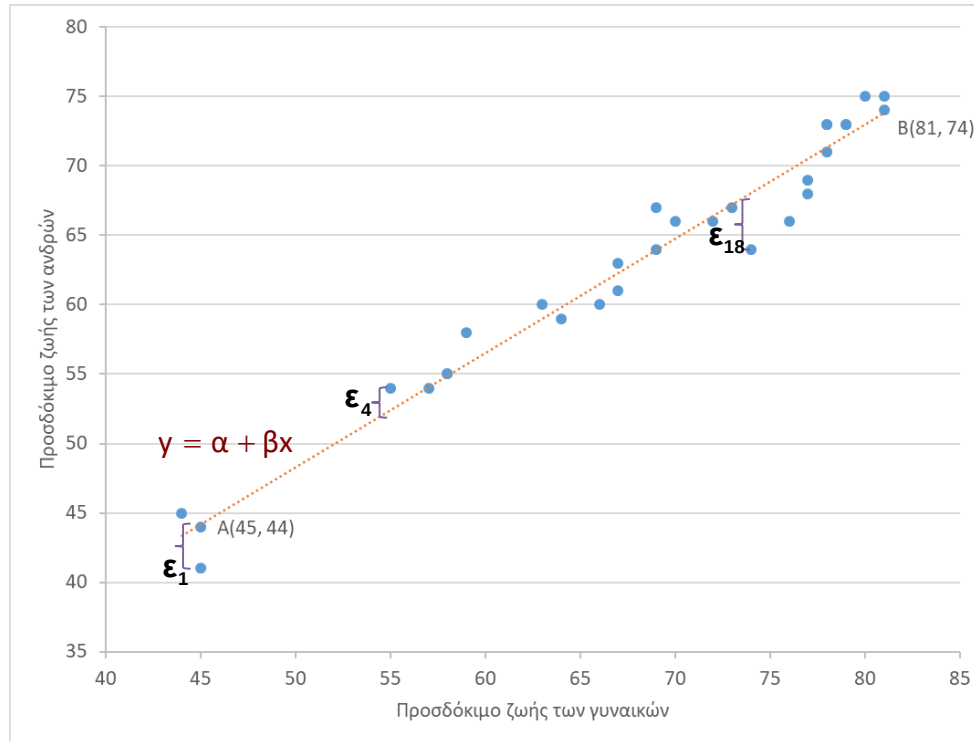


Γ τάξη Γενικού Λυκείου

Στατιστική
Ενδεικτικά έργα

Έργο 8 - ΟΠ

γ) Να βρείτε την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της μεταβλητής Y πάνω στη μεταβλητή X , εφαρμόζοντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.



Η ευθεία που φέρουμε πιστεύουμε ότι προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα μας.



Τανζανία ($x_1=45, y_1=41$)
Η εκτίμηση του Π.Ζ.Γ. της Τανζανίας είναι $\hat{y}_1$
Σφάλμα: $\epsilon_1 = \hat{y}_1 - y_1$

Η Μ.Ε.Λ.Τ. συνίσταται στον προσδιορισμό των παραμέτρων α και β , έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων των σημείων (x_i, y_i) από την ευθεία.

$$\sum_{i=1}^{30} \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{30} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$$

→ ελάχιστο

Γ τάξη Γενικού Λυκείου

Στατιστική
Ενδεικτικά έργα

.....

$$\hat{\beta} = \frac{30 \cdot \sum_{i=1}^{30} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{30} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{30} y_i \right)}{30 \sum_{i=1}^{30} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{30} x_i \right)^2}$$

Εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων
(least square estimators)



$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}$$

Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων ή ευθεία παλινδρόμησης
της Y πάνω στη X

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \hat{x}$$

$\hat{\alpha}$: παριστάνει την τεταγμένη του σημείου στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα y'y, δηλαδή την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν x=0.

$\hat{\beta}$: παριστάνει τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν το X μεταβληθεί κατά μια μονάδα.

$$\hat{y} = 7.2 + 0.82x$$

$$y = 6.5 + 0.83x$$



Τα Στοχαστικά Μαθηματικά...στο Λύκειο



δίνουν πολλές ευκαιρίες στους/στις μαθητές/τριες:

- ➡ να **ερμηνεύουν** καταστάσεις στον προσωπικό και ευρύτερο κοινωνικό τους βίο
- ➡ **αναπτύσσουν μαθηματικές πρακτικές**, όπως ο συλλογισμός, η μοντελοποίηση, η επικοινωνία και ο αναστοχασμός, που ενδυναμώνουν τη μάθηση των μαθηματικών και υποστηρίζουν σημαντικές ικανότητες και δεξιότητες για τον πολίτη του 21ου αιώνα.
- ➡ **αξιοποιούν ποικιλία πόρων και εργαλείων**, όπως η γλώσσα, τα σύμβολα, τα χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία για να διαχειριστούν κατάλληλα μέσα από προσεγγίσεις διερεύνησης αλλαγές, κρίσεις και προκλήσεις σε όποιο περιβάλλον δράσης τους.
- ➡ **χρησιμοποιούν με αυτοπεποίθηση και εμπιστοσύνη** τα Μαθηματικά για να κατανοούν με κριτικό τρόπο τον κόσμο γύρω τους, σε σχέση με τα υπόλοιπα θεματικά πεδία.
- ➡ **Θέτουν τα θεμέλια** για περαιτέρω ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού και των μαθηματικών γνώσεων εκείνων των μαθητών/τριών που επιθυμούν να συνεχίσουν σπουδές θετικού και οικονομικού προσανατολισμού, ώστε να αποκτήσουν τα απαραίτητα εφόδια για τη συνέχεια των σπουδών τους στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση.

Σας ευχαριστώ θερμά!