Π α ν ε λ λ α δ ι κ ε ς   Ε ξ ε τ α σ ε ι ς   (1 9 9 8)

01

Η συναρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιει τη σχεση: $f(f(x))+f^{3}(x)=2x+3$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδειξετε οτι η f ειναι « ενα προς ενα » .
β) Να λυσετε την εξισωση : $f(2x^3+x) = f(4-x)$, $x\in\mathbb{R}$.

α)
Εστω x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Τοτε $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ και $f^{3}(x_1)=f^{3}(x_2)$, οποτε $f(f(x_1))+ f^{3}(x_1) = f(f(x_2))+ f^{3}(x_2) \Rightarrow 2x_1+3=2x_2+3 \Rightarrow x_1 = x_2$.
Αρα η f ειναι 1-1 .
β)
Επειδη η f ειναι 1-1 εχουμε

$$f(2x^3+x)=f(4-x) \Leftrightarrow 2x^3+x=4-x \Leftrightarrow 2x^3+2x-4=0 \Leftrightarrow x^3+x-2=0 \overset{\text{Horner}}{\Leftrightarrow} (x-1)(x^2+x+2)=0.$$

Εφοσον το τριωνυμο x^2+x+2 έχει αρνητικη διακρινουσα θα ισχυει
$(x-1)(x^2+x+2)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

02

Ενας γεωργος προσθετει x μοναδες λιπασματος σε μια αγροτικη καλλιεργεια και συλλεγει g(x) μοναδες του παραγομενου προϊοντος .
Αν $g(x)=M_0 +M(1-e^{-\mu x})$, $x\geq 0$, οπου M_0 , M και μ ειναι θετικες σταθερες , να εκφρασετε το ρυθμο μεταβολης του παραγομενου προιοντος ως συναρτηση της g(x) . Ποια ειναι η σημασια της σταθερας M_0 ;

Για καθε $x\geq 0$ ειναι
- $g(x)=M_0 +M(1-e^{-\mu x})$ (1) και
- $g'(x)=M\mu e^{-\mu x}$ (2) .
- Απο την (1) εχουμε
  $Me^{-\mu x} = M_0 +M -g(x)$ (3) .

Απο τις (2) και (3) παιρνουμε :
$g'(x)=\mu(M_0 +M -g(x))$, $x\geq 0$.
Για x=0 απο την (1) παιρνουμε
$g(0)=M_0 +M(1-e^{0}) \Rightarrow g(0)= M_0$.
Αρα το M_0 ειναι οι μοναδες του παραγομενου προιοντος που προκυπτουν χωρις τη χρηση λιπασματος .

03

Δινεται η συναρτηση $h(x) = 212(e^{-4x} - e^{-ax})$, $x \geq 0$, οπου α πραγματικος αριθμος μεγαλυτερος του 4 .

α) Να δειξετε οτι $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = h(0) = 0$.

β) Να μελετησετε ως προς τα ακροτατα τη συναρτηση $h(x)$.

γ) Αν x_1 ειναι ριζα της πρωτης παραγωγου και x_2 ειναι ριζα της δευτερης παραγωγου της $h(x)$, να βρειτε τη σχεση που συνδεει τα x_1 , x_2 .

δ) Να υπολογισετε το ολοκληρωμα $M = \dfrac{334}{75}\int_0^{\ln 2} h(x)\,dx$, οταν α = 8 .

α)

Εχουμε $h(0) = 2^{12}(e^0 - e^0) = 0$.

Επειδη $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-4x} \overset{-4x=y}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} e^{y} = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-\alpha x} \overset{-\alpha x=y}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} e^{y} = 0$ θα ειναι

$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = 2^{12}(\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-4x} - \lim\limits_{x\to +\infty} e^{-\alpha x}) = 2^{12}(0-0) = 0$.

Αρα $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = h(0) = 0$.

β)

Για καθε $x \geq 0$ ειναι $h'(x) = 2^{12}(-4e^{-4x} + \alpha e^{-\alpha x})$. Εχουμε

- $h'(x)=0 \Leftrightarrow -4e^{-4x}+\alpha e^{-\alpha x}=0 \Leftrightarrow \alpha e^{-\alpha x}=4e^{-4x} \Leftrightarrow e^{(\alpha-4)x} = \dfrac{\alpha}{4} \Leftrightarrow (\alpha-4)x = \ln\dfrac{\alpha}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln\frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}$

(ειναι α > 4 αρα α - 4 > 0) . Ακομη

- $h'(x)<0 \Leftrightarrow -4e^{-4x}+\alpha e^{-\alpha x}<0 \Leftrightarrow \alpha e^{-\alpha x}<4e^{-4x} \Leftrightarrow e^{(\alpha-4)x} > \dfrac{\alpha}{4} \Leftrightarrow (\alpha-4)x > \ln\dfrac{\alpha}{4} \Leftrightarrow x > \dfrac{\ln\frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}$

(είναι α > 4 άρα α - 4 > 0). Ομοια

- $h'(x)>0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \dfrac{\ln\frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}$.

Αρα η h παρουσιαζει ολικο μεγιστο στη θεση $\dfrac{\ln\frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}$, το

$h\left(\dfrac{\ln\frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}\right) = 2^{12}\left(e^{-4\frac{\ln\frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}} - e^{-\alpha\frac{\ln\frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}}\right) = 2^{12}\left[\left(\dfrac{4}{\alpha}\right)^{\frac{4}{\alpha-4}} - \left(\dfrac{4}{\alpha}\right)^{\frac{4}{\alpha-4}}\right]$ και καθως ειναι γνησιως αυ-

ξουσα στο $[0 , \dfrac{\ln\frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}]$ και γνησιως φθινουσα στο $(\dfrac{\ln\frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}, +\infty)$ παρουσιαζει ολικο ελαχιστο στη θεση 0 , το $h(0) = 0$ (ειναι $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = h(0) = 0$) .

γ)

Για καθε $x \geq 0$ ειναι

$h''(x)=2^{12}(16e^{-4x} - \alpha^2 \cdot e^{-\alpha x})$ και εχουμε

$h''(x) = 0 \Leftrightarrow 16e^{-4x} - \alpha^2 \cdot e^{-\alpha x} = 0 \Leftrightarrow 16e^{-4x} = \alpha^2 \cdot e^{-\alpha x} \Leftrightarrow e^{(\alpha-4)x} = \dfrac{\alpha^2}{16} \Leftrightarrow (\alpha-4)x = \ln\left(\dfrac{\alpha}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$

$(\alpha-4)x = 2\ln\frac{\alpha}{4} \Leftrightarrow x = 2\frac{\ln\frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}$ (α - 4 > 0). Ειναι λοιπον

$x_1 = \frac{\ln\frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}$ και $x_2 = 2\frac{\ln\frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}$, αρα προκυπτει η σχεση $x_2 = 2x_1$.

δ)

Οταν α=8 εχουμε

$h(x) = 2^{12}(e^{-4x} - e^{-8x})$, $x \geq 0$. Επομενως :

$$M = \frac{334}{75}\int_0^{\ln 2} h(x)\,dx = \frac{334}{75}2^{12}\int_0^{\ln 2}(e^{-4x} - e^{-8x})\,dx = \frac{334}{75}2^{12}\cdot[-\frac{e^{-4x}}{4} + \frac{e^{-8x}}{8}]_0^{\ln 2} = 2004 .$$

04

Δινεται η συναρτηση φ(t) = 2t + μ, $t \in \mathbb{R}$, οπου η παραμετρος μ ειναι ενας πραγματικος αριθμος. Μια επιχειρηση εχει εσοδα E(t) που δινονται σε εκατομμυρια δραχμες, με τον τυπο E(t)=(t-1)φ(t), t≥0 , οπου t συμβολιζει το χρονο σε ετη .Το κοστος λειτουργιας K(t) της επιχειρησης δινεται, επισης σε εκατομμυρια δραχμες, συμφωνα με τον τυπο K(t) = φ(t+4) , t≥0.

α) Να βρειτε τη συναρτηση κερδους P(t) , για t≥0, οταν γνωριζουμε οτι κατα το πρωτο ετος λειτουργιας η επιχειρηση παρουσιασε ζημια δωδεκα εκατομμυρια δραχμες .

β) Ποια χρονικη στιγμη θα αρχισει η επιχειρηση να παρουσιαζει κερδη ;

γ) Ποιος θα ειναι ο ρυθμος μεταβολης της συναρτησης κερδους στο τελος του δευτερου ετους ;

δ) Να υπολογισετε την τιμη του ολοκληρωματος $I = \frac{111}{2}\int_0^6 P(t)dt$.

α)

Για καθε $t \geq 0$ ειναι: $P(t)=E(t)-K(t)=(t-1)\varphi(t)-\varphi(t+4)=(t-1)(2t+\mu)-(2(t+4)+\mu)=$
$= 2t^2+\mu t-2t-\mu-2t-8-\mu=2t^2+(\mu-4)t-2\mu-8$.

Επειδη κατα το πρωτο ετος λειτουργιας η επιχειρηση παρουσιασε ζημια 12 εκατομμυρια δραχμες θα ειναι $P(1)= -12 \Leftrightarrow 2\cdot 1^2 +(\mu-4)\cdot 1-2\mu-8 = -12 \Leftrightarrow \mu=2$.

Αρα $P(t) = 2t^2 +(2-4)t-2\cdot 2-8$, δηλαδη $P(t) = 2t^2 -2t-12$, $t \geq 0$.

β)

Η επιχειρηση παρουσιαζει κερδη οταν $P(t)>0 \Leftrightarrow 2t^2-2t-12>0 \Leftrightarrow t^2-t-6>0 \overset{t\geq 0}{\Leftrightarrow} t>3$.

Η επιχειρηση θα αρχισει να παρουσιαζει κερδη μετα το τελος του 3ου ετους .

γ)

Ζητουμενο ειναι το $P'(2)$. Ειναι $P'(t) = 4t-2$, $t \geq 0$.

Αρα $P'(2) =4\cdot 2-2 =$ 6 εκατομμυρια δραχμες / ετος .

δ)

$$I = \frac{111}{2}\int_0^6 P(t)\,dt = \frac{111}{2}\int_0^6 (2t^2 -2t-12)\,dt = \frac{111}{2}\ [2\frac{t^3}{3}-t^2-12t\ ]_0^6 = 1998 .$$