01

Υποθετουμε οτι υπαρχει πραγματικη συναρτηση g , παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$, τετοια ωστε $g(x+y) = e^y g(x)+e^x g(y)+xy+a$ για καθε $x , y \in \mathbb{R}$, οπου a πραγματικος αριθμος . Να αποδειξετε οτι :

α) $g(0) = -a$

β) $g'(x) = g(x)+g'(0)e^x+x$ για καθε $x \in \mathbb{R}$.

α)

Θετουμε στη δοθεισα ισοτητα x=y=0 και εχουμε

$g(0+0)=e^0g(0)+e^0g(0)+0\cdot 0+a \Rightarrow g(0)=g(0)+g(0)+a \Rightarrow g(0)=-a$.

β)

Παραγωγιζουμε και τα δυο μελη της δοθεισας ισοτητας ως προς y και εχουμε:

$g'(x+y)\cdot(x+y)'=(e^y)'g(x)+e^xg'(y)+(xy)'+(a)' \Rightarrow g'(x+y)=e^yg(x)+e^xg'(y)+x$.

Θρτουμε στην τελευταια ισοτητα y=0 και παιρνουμε

$g'(x+0)=e^0g(x)+e^xg'(0)+x$, δηλαδη $g'(x)=g(x)+g'(0)e^x+x$ για καθε $x\in\mathbb{R}$.

02

Έστω f πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\Re$, που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$. Έστω $\alpha , \beta \in\Re$ και $\alpha<\beta$. Να αποδειχθεί ότι :

α) $f(x)-f(\alpha) \le f'(\beta)(x-\alpha)$, για κάθε $x\in[\alpha , \beta]$.

β) $2\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \le f'(\beta)(\beta-\alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta-\alpha)$.

α)

Θεωρουμε τη συναρτηση $g(x)= f(x)-f(\alpha)-f'(\beta)(x-\alpha)$ η οποια ειναι παραγωγισιμη στο $[\alpha,\beta]$ (αθροισμα παραγωγισιμων συναρτησεων) με $g'(x)=f'(x)-f'(\beta)$.

Επειδη $f''(x)>0$ για καθε $x\in\mathbb{R}$, η f' ειναι γνησιως αυξουσα, αρα για καθε $x\in(\alpha,\beta)$ εχουμε $x<\beta \Rightarrow f'(x)<f'(\beta) \Rightarrow f'(x)-f'(\beta)<0 \Rightarrow g'(x)<0$.

Η g ειναι και συνεχης στο $[\alpha,\beta]$ αρα ειναι γνησιως φθινουσα στο $[\alpha,\beta]$.

Επομενως για καθε $x\in[\alpha,\beta]$ εχουμε

$x\ge\alpha \Rightarrow g(x)\le g(\alpha) \Rightarrow f(x)-f(\alpha)-f'(\beta)(x-\alpha)\le f(\alpha)-f(\alpha)-f'(\beta)\cdot 0 \Rightarrow$

$f(x)-f(\alpha)\le f'(\beta)(x-\alpha)$.

β)

Απο το (α) εχουμε

$$f'(\beta)(x-\alpha)-f(x)+f(\alpha)\ge 0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta (f'(\beta)(x-\alpha)-f(x)+f(\alpha))dx \ge 0 \Rightarrow$$

$$\int_\alpha^\beta f'(\beta)(x-\alpha)dx - \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(\alpha)\,dx \ge 0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \le f'(\beta)\int_\alpha^\beta (x-\alpha)\,dx + f(\alpha)(\beta-\alpha) \Rightarrow$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \le f'(\beta)\left[\frac{(x-\alpha)^2}{2}\right]_\alpha^\beta + f(\alpha)(\beta-\alpha) \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \le f'(\beta)\frac{(\beta-\alpha)^2}{2} + (\alpha)(\beta-\alpha) \Rightarrow$$

$$2\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \le f'(\beta)(\beta-\alpha)^2+2f(\alpha)(\beta-\alpha) .$$

03

Δινεται πραγματικη συναρτηση g , δυο φορες παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$, τετοια ωστε g(x)>0 και g''(x)g(x)-[g'(x)]2 >0 για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδειξετε οτι :

α) η συναρτηση $\frac{g'}{g}$ ειναι γνησιως αυξουσα και

β) $g(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2})\le\sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ για καθε x_1 , $x_2 \in \mathbb{R}$.

α)

Εστω $f(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$, $x\in\mathbb{R}$. Εχουμε $f'(x)=\frac{g''(x)g(x)-(g'(x))^2}{(g(x))^2}>0$ για καθε $x\in\mathbb{R}$.

(πηλικο θετικων αριθμων) . Αρα η $f = \frac{g'}{g}$ ειναι γνησιως αυξουσα στο $\mathbb{R}$.

β)

Θεωρουμε τη συναρτηση $h(x)=\ln(g(x))$, $x\in\mathbb{R}$. Ειναι $h'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$ και η h' ειναι γνησιως αυξουσα στο $\mathbb{R}$, οπως εχει αποδειχθει στο (α).

Αν $x_1=x_2$: $g(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2})=g(\frac{x_1}{2}+\frac{x_1}{2})=g(x_1)$ και $\sqrt{g(x_1)g(x_2)}=\sqrt{g(x_1)g(x_1)}=\sqrt{[g(x_1)]^2}=g(x_1)$,

αρα $g(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2})=\sqrt{g(x_1)g(x_2)}$.

Αν $x_1\neq x_2$, χωρις βλαβη της γενικοτητας υποθετουμε οτι $x_1<x_2$. Η συναρτηση h(x) ειναι συνεχης στα διαστηματα $[x_1,\frac{x_1+x_2}{2}]$, $[\frac{x_1+x_2}{2},x_2]$ και παραγωγισιμη στα $(x_1,\frac{x_1+x_2}{2})$, $(\frac{x_1+x_2}{2},x_2)$, αφου ειναι παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$.

Εφαρμοζουμε το θεωρημα μεσης τιμης για την h στα διαστήματα $[x_1,\frac{x_1+x_2}{2}]$, $[\frac{x_1+x_2}{2},x_2]$ οποτε υπαρχει ενα τουλαχιστον $\xi_1\in(x_1,\frac{x_1+x_2}{2})$ τετοιο ωστε

$h'(\xi_1)=\dfrac{h(\frac{x_1+x_2}{2})-h(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2}-x_1}\Rightarrow h'(\xi_1)=\dfrac{h(\frac{x_1+x_2}{2})-h(x_1)}{\frac{x_2-x_1}{2}}$ και υπαρχει ενα τουλαχιστον

$\xi_2\in(\frac{x_1+x_2}{2},x_2)$ τετοιο ωστε $h'(\xi_2)=\dfrac{h(x_2)-h(\frac{x_1+x_2}{2})}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}\Rightarrow h'(\xi_2)=\dfrac{h(x_2)-h(\frac{x_1+x_2}{2})}{\frac{x_2-x_1}{2}}$.

Επειδη η h' ειναι γνησιως αυξουσα και $\xi_1<\xi_2$ θα εχουμε

$h'(\xi_1)<h'(\xi_2)\Rightarrow\dfrac{h(\frac{x_1+x_2}{2})-h(x_1)}{\frac{x_2-x_1}{2}}<\dfrac{h(x_2)-h(\frac{x_1+x_2}{2})}{\frac{x_2-x_1}{2}}\overset{x_2-x_1>0}{\Longrightarrow}2h(\frac{x_1+x_2}{2})<h(x_1)+h(x_2)\Rightarrow$

$2\ln(g(\frac{x_1+x_2}{2}))<\ln(g(x_1))+\ln(g(x_2))\Rightarrow\ln(g(\frac{x_1+x_2}{2}))^2<\ln(g(x_1)g(x_2))\Rightarrow$

$(g(\frac{x_1+x_2}{2}))^2 < g(x_1)g(x_2) \Rightarrow g(\frac{x_1+x_2}{2}) < \sqrt{g(x_1)g(x_2)}$.

Αρα η σχέση $g(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2})=\sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ ισχυει για καθε $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$.

04

Υποθετουμε οτι υπαρχει πραγματικη συναρτηση f, ορισμενη στο $\mathbb{R}$, δυο φορες παραγωγισιμη, τετοια ωστε $(x-2)f''(x)+(\alpha\eta\mu x-\beta x^2)f'(x) = e^{x-2}-1$ για καθε $x\in\mathbb{R}$, οπου α, β πραγματικοι αριθμοι. Εστω οτι υπαρχει πραγματικος αριθμος $\rho\neq 2$, ωστε $f'(\rho)=0$. Να εξετασετε αν ισχυει η σχεση $f''(\rho)>0$.

Αφου η ισοτητα $(x-2)f''(x)+(\alpha\eta\mu x-\beta x^2)f'(x)=e^{x-2}-1$ ισχυει για καθε $x\in\mathbb{R}$, θα ισχυει και για $x=\rho$: $(\rho-2)f''(\rho)+(\alpha\eta\mu\rho-\beta\rho^2)f'(\rho)=e^{\rho-2}-1 \Rightarrow (\rho-2)f''(\rho)+0=e^{\rho-2}-1 \Rightarrow$ $f''(\rho)=\frac{e^{\rho-2}-1}{\rho-2}$ (ειναι $\rho\neq 2$) .Διακρινουμε τις περιπτωσεις :

- Αν $\rho>2$ τοτε $\rho-2>0 \Rightarrow e^{\rho-2}>e^0 \Rightarrow e^{\rho-2}-1>0 \Rightarrow \frac{e^{\rho-2}-1}{\rho-2}>0$.
- Αν $\rho<2$ τοτε $\rho-2<0 \Rightarrow e^{\rho-2}<e^0 \Rightarrow e^{\rho-2}-1<0 \Rightarrow \frac{e^{\rho-2}-1}{\rho-2}>0$.

Αρα ισχυει η σχεση $f''(\rho)>0$.

05

Οι συναρτησεις f, g ειναι δυο φορες παραγωγισιμες στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιουν τις σχεσεις $f''(x)-g''(x)=4$ για καθε $x\in\mathbb{R}$, $f'(1)=g'(1)$ και $f(2)=g(2)$.
α) Να βρειτε τη συναρτηση $t(x) = f(x)-g(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
β) Να βρειτε το εμβαδο του χωριου που περικλειεται απο τις γραφικες παραστασεις των συναρτησεων f και g .

α)
Για καθε $x\in\mathbb{R}$ ειναι
$f''(x)-g''(x)=4 \Leftrightarrow (f'(x)-g'(x))'=(4x)' \Leftrightarrow f'(x)-g'(x)=4x+c_1$ οπου $c_1\in\mathbb{R}$.
Απ'τη τελευταια ισοτητα, επειδη $f'(1)=g'(1)$, για $x=1$: $f'(1)-g'(1)=4\cdot 1+c_1 \Leftrightarrow c_1=-4$.
Αρα για καθε $x\in\mathbb{R}$ ειναι
$f'(x)-g'(x)=4x-4 \Leftrightarrow (f(x)-g(x))'=(2x^2-4x)' \Leftrightarrow f(x)-g(x)=2x^2-4x+c_2$, οπου $c_2\in\mathbb{R}$.
Απ'τη τελευταια ισοτητα, επειδή $f(2)=g(2)$, για $x=2$: $f(2)-g(2)=8-8+c_2 \Leftrightarrow c_2=0$.
Ετσι για καθε $x\in\mathbb{R}$ ειναι $f(x)-g(x)=2x^2-4x$ ή $t(x) = 2x^2 - 4x$.
β)
Ειναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-4x=0 \Leftrightarrow 2x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$.
Επειδη οι συναρτησεις f, g ειναι συνεχεις στο $[0,2]$ και $f(x)-g(x)=2x^2-4x\leq 0$ για καθε $x\in[0,2]$ (προσημο τριωνυμου) το ζητουμενο εμβαδο ειναι

$$E = \int_0^2 -(f(x)-g(x))\,dx = \int_0^2 (4x-2x^2)\,dx = [2x^2-2\frac{x^3}{3}]_0^2 = (8-\frac{16}{3})-(0-0) = \frac{8}{3} \text{ τ.μ.}$$

06

Εστω f πραγματικη συναρτηση συνεχης στο $\mathbb{R}$, τετοια ωστε $f(x)\geq 2$ για καθε $x\in\mathbb{R}$. Θεωρουμε τη συναρτηση $g(x) = x^2 - 5x + 1 - \int_0^{x^2-5x} f(t)\,dt$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειξετε οτι $g(-3)g(0) < 0$.

β) Να αποδειξετε οτι η εξίσωση $g(x)=0$ εχει μια μονο ριζα στο διαστημα $(-3 , 0)$.

α)

Εχουμε

• $g(0)= 0^2-5\cdot 0+1-\int_0^0 f(t)dt=1>0$ και

• $g(-3)=(-3)^2-5(-3)+1-\int_0^{24} f(t)\,dt \Rightarrow g(-3)=25-\int_0^{24} f(t)\,dt \quad (1)$.

Ομως για καθε $x\in\mathbb{R}$: $f(x)\geq 2 \Rightarrow f(x)-2\geq 0 \Rightarrow \int_0^{24}(f(x)-2)\,dx\geq 0 \Rightarrow$

$\int_0^{24} f(x)\,dx - \int_0^{24} 2dx \geq 0 \Rightarrow \int_0^{24} f(x)\,dx \geq 2(24-0) \Rightarrow \int_0^{24} f(x)\,dx \geq 48 \Rightarrow \int_0^{24} f(x)\,dx > 25 \Rightarrow$

$25 - \int_0^{24} f(x)\,dx < 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} g(-3) < 0$.

Αρα $g(-3)g(0) < 0$.

β)

• Η g ειναι συνεχης στο $[-3,0]$ ως αθροισμα συνεχων συναρτησεων και

• $g(-3)g(0) < 0$.

Αρα συμφωνα με το θεωρημα Bolzano η εξισωση $g(x)=0$ εχει μια τουλαχιστον ρίζα στο $(-3,0)$.

Ακομη η $g(x)$ ειναι παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x)=2x-5-f(x^2-5x)\cdot(x^2-5x)'=2x-5-f(x^2-5x)\cdot(2x-5)=(2x-5)(1-f(x^2-5x))$.

Για καθε $x\in(-3,0)$ ειναι $2x-5<0$ και $f(x^2-5x)\geq 2>1 \Rightarrow 1-f(x^2-5x)<0$, αρα $g'(x)>0$, οποτε η g ειναι γνησιως αυξουσα στο $(-3,0)$ και συνεπως η εξισωση $g(x)=0$ εχει το πολυ μια ρίζα στο $(-3,0)$.

Τελικα η εξισωση $g(x)=0$ εχει μια μονο ριζα στο διαστημα $(-3,0)$.