01 *Να βρεθει η συνεχης συναρτηση f για την οποια ισχυει η σχεση :*

$$\int_0^1 e^{1-x} f(x)\,dx = f(x)+e^x \text{ , για καθε } x\in\mathbb{R}\ .$$

Το $\int_0^1 e^{1-x} f(x)\,dx$ ειναι πραγματικη σταθερα, έστω c, οποτε

$c=f(x)+e^x \Rightarrow f(x)=-e^x+c$, για καθε $x\in\mathbb{R}$.

Η δοσμενη σχεση γραφεται :

$$\int_0^1 e^{1-x}(-e^x+c)\,dx=-e^x+c+e^x \Rightarrow \int_0^1 (-e^1+ce^{1-x})\,dx=c \Rightarrow [-ex-ce^{1-x}]_0^1=c \Rightarrow (-e-c)-(0-ce)=c \Rightarrow$$

$c=\dfrac{e}{e-2}$. Αρα $f(x)=-e^x+\dfrac{e}{e-2}$, για καθε $x\in\mathbb{R}$.

02 *Η συναρτηση f ειναι συνεχης στο διαστημα [α,β] και ισχυει οτι $f(x)+f(\alpha+\beta-x)=c$, για καθε $x\in[\alpha,\beta]$, οπου c πραγματικος αριθμος .*

Να αποδειξετε οτι : $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = (\beta-\alpha)f(\dfrac{\alpha+\beta}{2}) = \dfrac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha)+f(\beta))$.

Εστω $I=\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx$. Θετουμε $\alpha+\beta-x = t \Rightarrow x = \alpha+\beta-t \Rightarrow dx = -dt$.

Ακομα για x=α παιρνουμε t=β , ενω για x=β παιρνουμε t=α . Αρα

$$I=\int_\beta^\alpha f(t)(-1)dt = \int_\alpha^\beta f(t)dt=\int_\alpha^\beta f(x)dx .$$

Απο την σχεση $f(x)+f(\alpha+\beta-x) = c$ προκυπτει :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx=\int_\alpha^\beta c\,dx \Rightarrow I+I=c(\beta-\alpha) \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx=\frac{c(\beta-\alpha)}{2} \quad (1) .$$

Απο την σχεση $f(x)+f(\alpha+\beta-x) = c$ για x=α παιρνουμε $f(\alpha)+f(\beta) = c$ (2) , ενω για $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ παιρνουμε $f(\dfrac{\alpha+\beta}{2})+f(\dfrac{\alpha+\beta}{2}) = c \Rightarrow c = 2f(\dfrac{\alpha+\beta}{2})$ (3) .

Η (1) λογω της (2) γραφεται $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\dfrac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha)+f(\beta))$, ενω λογω της (3)

γραφεται $\int_\alpha^\beta f(x)dx=(\beta-\alpha)f(\dfrac{\alpha+\beta}{2})$.

Ετσι αποδειχθηκε το ζητουμενο.

03

Δινονται οι πραγματικες συναρτησεις f, g που εχουν πεδιο ορισμου το συνολο $\mathbb{R}$. Αν οι f και g εχουν συνεχεις πρωτες παραγωγους και συνδεονται μεταξυ τους με τις σχεσεις $f'=g$, $g'=-f$ τοτε να αποδειξετε οτι :
α) υπαρχουν οι συναρτησεις f'' και g'' και ειναι συνεχεις.
β) ισχυουν οι σχεσεις $f''+f=g''+g=0$ και οτι η συναρτηση $h=f^2+g^2$ ειναι σταθερη.
γ) αν x_1 και x_2 ειναι δυο ριζες της f και $f(x)\neq 0$ για καθε $x\in(x_1,x_2)$, τοτε η g εχει μια μονο ριζα στο διαστημα (x_1,x_2).

α)
Ειναι $f'(x)=g(x)$ και $g(x)$ παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$, αρα η f' παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=g'(x)=-f(x)$ (1) .
Ακομη $g'(x)=-f(x)$ και $f(x)$ παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$, αρα η g' παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ με $g''(x)=-f'(x)=-g(x)$ (2) .
Επειδη οι $-f$, $-g$ ειναι συνεχεις στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγισιμες στο $\mathbb{R}$) ,απο τις (1) ,(2) προκυπτει οτι οι f'' και g'' ειναι συνεχεις στο $\mathbb{R}$.
β)
Λογω των (1),(2): $f''(x)+f(x)=-f(x)+f(x)=0$, $g''(x)+g(x)=-g(x)+g(x)=0$.
Για καθε $x\in\mathbb{R}$ εχουμε :
$h'(x)=(f^2(x)+g^2(x))'=2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)=2f(x)g(x)-2g(x)f(x)=0$,
αρα η h ειναι σταθερη στο $\mathbb{R}$.
γ)
- f ειναι συνεχης στο $[x_1 , x_2]$
- f ειναι παραγωγίσιμη στο (x_1 , x_2)
- $f(x_1)= f(x_2)=0$.

Συμφωνα με το θεωρημα Rolle η εξισωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0$, εχει μια τουλαχιστον ριζα ξ_1 στο (x_1 , x_2) .
Εστω οτι η $g(x)=0$ εχει και αλλη ριζα ξ_2 στο (x_1 , x_2) . Τοτε επειδη η g ειναι συνεχης στο $[\xi_1 , \xi_2]$, παραγωγισιμη στο (ξ_1 , ξ_2) και $g(\xi_1)= g(\xi_2)=0$, συμφωνα με το θεωρημα Rolle η εξισωση $g'(x)=0 \Leftrightarrow -f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$, εχει μια τουλαχιστον ριζα στο $(\xi_1 , \xi_2)\subset (x_1 , x_2)$, που ειναι ατοπο αφου $f(x)\neq 0$ για καθε $x\in(x_1 , x_2)$. Αρα η g εχει μια μονο ριζα στο διαστημα (x_1 , x_2) .

04

Να υπολογισετε το εμβαδο του χωριου που περικλειεται απο τις γραφικες παραστασεις των συναρτησεων $g(x)=\sqrt{x}$ και $f(x)=2x-1$ και την ευθεια $x=0$.

Για $x\geq 0$ εχουμε $f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x-1=\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x-\sqrt{x}-1=0$. Θετουμε $\sqrt{x}=u\geq 0$ και η εξισωση γραφεται $2u^2-u-1=0\Leftrightarrow u=1$ ή $u=-\frac{1}{2}$(απορριπτεται). Αρα $\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$.

Για καθε $x\in[0,1]$ ειναι: $g(x)-f(x) = \sqrt{x}-2x+1=\sqrt{x}-2\sqrt{x}^2+1=\sqrt{x}-\sqrt{x}^2-\sqrt{x}^2+1=$
$=\sqrt{x}(1-\sqrt{x})+(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})=(1-\sqrt{x})(2\sqrt{x}+1)\geq 0$.Εφοσον οι συναρτησεις f,g ειναι συνεχεις στο $[0,1]$ το ζητουμενο εμβαδο ειναι :

$E=\int_0^1 (g(x)-f(x))\,dx=\int_0^1(\sqrt{x}-2x+1)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^2+x\right]_0^1=\frac{2}{3}-1+1=\frac{2}{3}$ τ.μ.

05

Δινεται η συναρτηση g συνεχης στο $\mathbb{R}$ και $f(x)=\int_0^x (x-t)g(t)\,dt$.

Να αποδειξετε οτι η f ειναι δυο φορες παραγωγισιμη και να μελετησετε την f ως προς τα κοιλα οταν $g(x)\neq 0$ για καθε $x\in\mathbb{R}$.

Εχουμε : $f(x)=\int_0^x xg(t)dt-\int_0^x tg(t)dt=x\cdot\int_0^x g(t)dt-\int_0^x tg(t)dt$.

Επειδη οι συναρτησεις $g(t)$, $tg(t)$ ειναι συνεχεις στο $\mathbb{R}$, η f ειναι παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=(x)'\cdot\int_0^x g(t)dt+x\cdot\left(\int_0^x g(t)dt\right)'-\left(\int_0^x tg(t)dt\right)'=\int_0^x g(t)dt+xg(x)-xg(x)=\int_0^x g(t)dt$.

Επειδη $\left(\int_0^x g(t)dt\right)'=g(x)$ η f ειναι δυο φορες παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=g(x)$.

Οταν $g(x)\neq 0$ για καθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδη η g ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}$, θα εχει σταθερο προσημο, δηλαδη $g(x)>0$ για καθε $x\in\mathbb{R}$ ή $g(x)<0$ για καθε $x\in\mathbb{R}$.
Λογω της $f''(x)=g(x)$ θα ειναι $f''(x)>0$ για καθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f''(x)<0$ για καθε $x\in\mathbb{R}$, οποτε η C_f στρεφει τα κοιλα ανω ή κατω στο $\mathbb{R}$ αντιστοιχα .

06

Θεωρουμε τη συναρτηση $f(x)=\sqrt{1+x^2}+\lambda x$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α)Να υπολογισετε την τιμη του λ αν ειναι γνωστο οτι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$.

β)Για την τιμη του λ που βρηκατε παραπανω να υπολογισετε το $I=\int_0^1\frac{x}{f^2(x)}dx$

α)

Για $x>0$ ειναι $\frac{f(x)}{x}=\frac{x\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\lambda\right)}{x}=\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\lambda$, αρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\lambda\right)=1\Rightarrow\sqrt{0+1}+\lambda=1\Rightarrow\lambda=0$.

β)

Για $\lambda=0$ εχουμε $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, αρα

$I=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_0^1=\frac{1}{2}(\ln2-\ln1)=\frac{1}{2}\ln2$.

07 *Να αποδειξετε τις ανισοτητες :*

α) ημx < 2x , x >0 . *β) ημx > $x-\frac{x^3}{3}$, x >0 .*

α)
Θεωρουμε τη συναρτηση $\varphi(x)=\eta\mu x-2x$, $x \geq 0$. Εχουμε $\varphi'(x)=\sigma\upsilon\nu x-2<0$, για καθε $x\geq 0$ (ειναι $-1\leq \sigma\upsilon\nu x\leq 1$), συνεπως η φ ειναι γνησιως φθινουσα στο $[0,+\infty)$. Αρα για καθε x>0 ειναι $\varphi(x)<\varphi(0)\Rightarrow \eta\mu x-2x<\eta\mu 0-2\cdot 0\Rightarrow \eta\mu x<2x$.
β)
Θεωρουμε τη συναρτηση $g(x)=\eta\mu x-x+\frac{x^3}{3}$, $x\geq 0$. Εχουμε $g'(x)=\sigma\upsilon\nu x-1+x^2$,
$g''(x)=-\eta\mu x+2x>0$, για καθε x>0 (λόγω του (α)), αρα η συναρτηση g' ειναι γνησιως αυξουσα στο $[0,+\infty)$. Επομενως για καθε x>0 ειναι
$g'(x)>g'(0)\Rightarrow g'(x)>\sigma\upsilon\nu 0-1+0^2\Rightarrow g'(x)>0$. Αρα η g ειναι γν. αυξουσα στο $[0,+\infty)$ και συνεπως για καθε x>0 ειναι

$$g(x)> g(0) \Rightarrow \eta\mu x- x +\frac{x^3}{3}> \eta\mu 0- 0 +\frac{0^3}{3}\Rightarrow \eta\mu x > x-\frac{x^3}{3} .$$

08 *Εστω οτι f(t) ειναι η ποσοτητα ενος αντιβιοτικου που εχει απορροφηθει απο το ανθρωπινο σωμα κατα τη χρονικη στιγμη t οπου $t\geq 0$ και $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ειναι πραγματικη συναρτηση με $f(\sqrt{t}) = 1-2^{-\frac{\sqrt{t}}{499}}$.*
Να βρεθει η χρονικη στιγμη t_1 κατα την οποια ο ρυθμος απορροφησης του αντιβιοτικου απο το ανθρωπινο σωμα ειναι ισος με $\frac{1}{16}$ του ρυθμού απορροφησης κατα τη χρονικη στιγμη $t_0=0$.

Θετουμε $\sqrt{t}=x$, οποτε $f(x) = 1-2^{-\frac{x}{499}}$, $x\geq 0$.
Για καθε $x\geq 0$ ειναι :

$$f'(x)=1-2^{-\frac{x}{499}}\cdot\ln2\cdot(-\frac{x}{499})'=\frac{\ln2}{499}\cdot 2^{-\frac{x}{499}},$$

$$f'(0)=\frac{\ln2}{499}\cdot 2^0=\frac{\ln2}{499}.$$

Η ζητουμενη χρονικη στιγμη t_1 θα βρεθει απο την εξισωση

$$f'(t_1)=\frac{1}{16}\cdot f'(0)\Leftrightarrow \frac{\ln2}{499}\cdot 2^{-\frac{t_1}{499}}\ \frac{1}{16}\cdot\frac{\ln2}{499}\Leftrightarrow 2^{-\frac{t_1}{499}}=2^{-4}\Leftrightarrow -\frac{t_1}{499}= - 4 \Leftrightarrow t_1 =1996 .$$

09

Θεωρουμε τις παραγωγισιμες συναρτησεις f , g που εχουν πεδιο ορισμου το διαστημα $[0,+\infty)$ για τις οποιες ισχυει η σχεση : $f'(x)=g'(x)+\eta\mu^2 x+e^x$, $x\in[0,+\infty)$. Να αποδειξετε οτι $f(0)+g(x)<g(0)+f(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

Θεωρουμε τη συναρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$, $x\in[0,+\infty)$.
Ειναι
$h'(x)=f'(x)-g'(x)=g'(x)+\eta\mu^2x+e^x-g'(x)=\eta\mu^2x+e^x>0$,
αρα η h ειναι γνησιως αυξουσα στο $[0,+\infty)$.
Συνεπως για καθε $x>0$ εχουμε
$h(x)>h(0)\Rightarrow f(x)-g(x)>f(0)-g(0)\Rightarrow f(0)+g(x)<g(0)+f(x)$.

10

Εστω η συναρτηση $f(x)=e^{\alpha x}$, οπου $\alpha\in\mathbb{R}$. Να αποδειξετε οτι υπαρχουν δυο τιμες της παραμετρου α ετσι ωστε να ικανοποιειται η σχεση $f''(x)+2f'(x)=3f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ειναι
$f'(x)=\alpha e^{\alpha x}$,
$f''(x)=\alpha^2e^{\alpha x}$.
Για καθε $x\in\mathbb{R}$ εχουμε :
$f''(x)+2f'(x)=3f(x)\Leftrightarrow \alpha^2e^{\alpha x}+2\alpha e^{\alpha x} = 3e^{\alpha x}\Leftrightarrow e^{\alpha x}(\alpha^2+2\alpha-3)=0 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha-3=0\Leftrightarrow$
$\alpha=1$ ή $\alpha= -3$.

Κανε την επισκεψη σου στο : http://drmaths58.blogspot.com/