Πανελλαδικες Εξετασεις (1992)

01 *Δινεται η συναρτηση f με $f(x)=(x+4)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογιστει το εμβαδον του χωριου που οριζεται απο τα σημεια (x , y) με $-1\le x\le 1$, $0\le y\le f(x)$.*

Η f ειναι συνεχης στο [-1,1] ως γινομενο συνεχων συναρτησεων και για καθε $x\in[-1,1]$ ισχυει $f(x)>0$.
Αρα το ζητουμενο εμβαδο ειναι:

$$E=\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(x+4)e^{-x}dx=\int_{-1}^{1}(x+4)(-e^{-x})'dx=[-e^{-x}(x+4)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(x+4)'(-e^{-x})dx=$$

$$=[-e^{-x}(x+4)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(-e^{-x})dx=[-e^{-x}(x+4)]_{-1}^{1}-[e^{-x}]_{-1}^{1}=\frac{2(2e^2-3)}{e}\ \text{τ.μ.}$$

02 *α) Να υπολογιστει το ολοκληρωμα : $E(t)=\int_1^t (x-2)\ln x dx$, για καθε $t>1$.*

β) Να βρειτε το οριο $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{E'(t)}{t\cdot\ln t}$

α)

$$E(t)=\int_1^t\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)'\ln x dx = \left[\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\ln x\right]_1^t-\int_1^t\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\frac{1}{x}dx=\left[\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\ln x\right]_1^t-\int_1^t\left(\frac{x}{2}-2\right)dx=$$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\ln x\right]_1^t-\left[\frac{x^2}{4}-2x\right]_1^t=\left(\frac{t^2}{2}-2t\right)\ln t-0-\left(\frac{t^2}{4}-2t-\frac{1}{4}+2\right)=\left(\frac{t^2}{2}-2t\right)\ln t-\frac{t^2}{4}+2t-\frac{7}{4},$$

για καθε $t>1$.

β)

Για καθε $t>1$ ειναι $E'(t)=\left(\int_1^t(x-2)\ln x dx\right)'=(t-2)\ln t$. Επομενως :

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{E'(t)}{t\cdot\ln t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(t-2)\ln t}{t\cdot\ln t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t-2}{t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{2}{t}\right)\ 1-0=1.$$

03 *Η συναρτηση g εχει συνεχη παραγωγο στο κλειστο διαστημα [0,π] και $g(\pi)=e^{-\pi}$. Αν $\int_0^\pi[g(x)+g'(x)]e^x dx=2$,να βρειτε την τιμη της συναρτησης g στο σημειο x=0.*

Εχουμε :

$$\int_0^\pi[g(x)+g'(x)]e^x dx=2\ \Rightarrow \int_0^\pi[g(x)(e^x)'+g'(x)e^x]dx=2\ \Rightarrow$$

$$[g(x)e^x]_0^\pi=2\ \Rightarrow\ g(\pi)e^\pi-g(0)e^0=2\Rightarrow\ e^{-\pi}e^\pi-g(0)=2\Rightarrow 1-g(0)=2\Rightarrow\ g(0)=-1\ .$$

04

Να βρειτε πολυωνυμικη συναρτηση f με $f(x)=\alpha x^3+\beta x+\gamma$, $x\in\mathbb{R}$ και α , β , γ πραγματικους αριθμους, η οποια ικανοποιει τις ακολουθες συνθηκες :

(i) Η συναρτηση f ειναι περιττη .

(ii) Η συναρτηση f παρουσιαζει τοπικο μεγιστο στο σημειο $x_o=1$.

(iii) $\int_0^2 f(x)dx=2$.

Αφου η f ειναι περιττη, για καθε $x\in\mathbb{R}$ θα ειναι $f(-x)=-f(x)\Rightarrow\alpha(-x)^3+\beta(-x)+\gamma=-(\alpha x^3+\beta x+\gamma)\Rightarrow-\alpha x^3-\beta x+\gamma=-\alpha x^3-\beta x-\gamma\Rightarrow2\gamma=0\Rightarrow\gamma=0$.
Η f ως πολυωνυμικη ειναι παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ και επειδη παρουσιαζει τοπικο μεγιστο στο σημειο $x_o=1$, συμφωνα με το θεωρημα Fermat θα ειναι $f'(1)=0$.
Ομως $f'(x)=3\alpha x^2+\beta$, αρα $f'(1)=0\Rightarrow3\alpha1^2+\beta=0\Rightarrow3\alpha+\beta=0\Rightarrow\beta=-3\alpha$ (1) Ακομη

$$\int_0^2 f(x)dx=2\overset{\gamma=0,\beta=-3\alpha}{\Rightarrow}\int_0^2(\alpha x^3-3\alpha x)dx=2\Rightarrow[\alpha\frac{x^4}{4}-3\alpha\frac{x^2}{2}]_0^2=2\Rightarrow4\alpha-6\alpha=2\Rightarrow\alpha=-1.$$

Απο την (1) παιρνουμε $\beta=3$. Αρα $f(x)=-x^3+3x$.

05

α) Να αποδειχθει οτι μια συναρτηση f ορισμενη στο $\mathbb{R}$ εχει την ιδιοτητα $f'=f$ αν και μονο αν $f(x)=ce^x$, οπου c πραγματικη σταθερα.

β) Να βρεθει η συναρτηση g ορισμενη στο διαστημα $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, η οποια ικανοποιει τις σχεσεις: $g'(x)\sigma\upsilon\nu x+g(x)\eta\mu x=g(x)\sigma\upsilon\nu x$ και $g(0)=1992$.

α)
Για καθε $x\in\mathbb{R}$ εχουμε:
$f'(x)=f(x)\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow e^{-x}(f'(x)-f(x))=e^{-x}\cdot0\Leftrightarrow[e^{-x}f(x)]'=0\Leftrightarrow e^{-x}f(x)=c\Leftrightarrow$ $f(x)=ce^x$, οπου c πραγματικη σταθερα.
β)
Η δοσμενη σχεση για καθε $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ γραφεται :

$$g'(x)\sigma\upsilon\nu x-g(x)(\sigma\upsilon\nu x)'=g(x)\sigma\upsilon\nu x\overset{\sigma\upsilon\nu x>0}{\Leftrightarrow}\frac{g'(x)\sigma\upsilon\nu x-g(x)(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=ce^x\Leftrightarrow g(x)=ce^x\sigma\upsilon\nu x\ .$$

Για $x=0$ εχουμε $g(0)=ce^0\sigma\upsilon\nu0\Leftrightarrow1992=c\cdot1\cdot1\Leftrightarrow c=1992$.

Αρα $g(x)=1992e^x\sigma\upsilon\nu x$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

06

Να αποδειξετε οτι για καθε x στο ανοικτο διαστημα (0,1) ισχυει η σχεση : $1+x<e^x<1+ex$.

Για καθε $x\in(0,1)$ εχουμε $1+x<e^x<1+ex\Leftrightarrow x<e^x-1<ex\Leftrightarrow1<\frac{e^x-1}{x}<e\Leftrightarrow1<\frac{e^x-e^0}{x-0}<e$

Θεωρουμε τη συναρτηση $f(t)=e^t$, $t\in[0\ x]$ οπου $x\in(0,1)$.

Η f ειναι συνεχης στο $[0,x]$ και παραγωγισιμη στο $(0,x)$ οποτε συμφωνα με το θεωρημα μεσης τιμης υπαρχει ενα τουλαχιστον $\xi \in (0,x)$ τετοιο ωστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow e^{\xi}=\dfrac{e^x-e^0}{x-0}$. Αρκει λοιπον να δειξουμε οτι $1 < e^{\xi} < e$.

Ειναι $\xi\in(0,x) \Rightarrow 0<\xi<x \Rightarrow 0<\xi<1$ (αφου $x<1$).

Αρα $e^0<e^{\xi}<e^1 \Rightarrow 1<e^{\xi}<e$.

07

α) Δινεται η συναρτηση f ορισμενη και δυο φορες παραγωγισιμη στο διαστημα Δ με τιμες στο $(0,+\infty)$. Να δεχθει οτι η συναρτηση g με $g(x)=\ln f(x)$, $x\in\Delta$, εχει την ιδιοτητα « $g''(x)\geq 0$, για καθε $x\in\Delta$ » αν και μονο αν ισχυει η σχεση : $f(x)f''(x)\geq[f'(x)]2$, για καθε $x\in\Delta$.

β) Να βρεθει το μεγιστο διαστημα, στο οποιο η συναρτηση g με $g(x)=\ln(x2+2)$ εχει την ιδιοτητα $g''(x)\geq 0$.

α)

Εχουμε : $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ και $g''(x)=\dfrac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$, για καθε $x\in\Delta$.

Αρα για καθε $x\in\Delta$: $g''(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}\geq 0 \Leftrightarrow f(x)f''(x)\geq[f'(x)]^2$.

β)

Είναι $g(x)=\ln f(x)$ οπου $f(x)=x^2+2>0$, για καθε $x\in\mathbb{R}$. Συμφωνα με το (α) ερωτημα θα εχουμε:

$g''(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)f''(x)\geq[f'(x)]^2 \Leftrightarrow (x^2+2)\cdot 2\geq(2x)^2 \Leftrightarrow 2x^2+4-4x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2\leq 2 \Leftrightarrow$
$|x|\leq\sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$. Αρα το ζητουμενο διαστημα ειναι το $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

08

α) Να μελετηθει ως προς τη μονοτονια και τα κοιλα η συναρτηση f με $f(x)=a^x-x$, $x\in\mathbb{R}$ και $0<a<1$.

β) Να βρεθουν οι πραγματικες τιμες του λ, για τις οποιες ισχυει η ισοτητα $a^{\lambda^2-4}-a^{\lambda-2}=(\lambda^2-4)-(\lambda-2)$, οπου $0<a<1$.

α)

Για καθε $x\in\mathbb{R}$ εχουμε $f'(x)=a^x\ln a-1$ και $f''(x)=a^x(\ln a)^2$.

Επειδη $0<a<1$ θα ειναι $\ln a<0$, οποτε $f'(x)<0$ και $f''(x)>0$, για καθε $x\in\mathbb{R}$ $(a^x>0)$.

Αρα η f ειναι γνησιως φθινουσα στο $\mathbb{R}$ και στρεφει τα κοιλα ανω στο $\mathbb{R}$.

β)

Η δοθεισα ισοτητα γραφεται:

$a^{\lambda^2-4}-(\lambda^2-4)=a^{\lambda-2}-(\lambda-2) \Leftrightarrow f(\lambda^2-4)=f(\lambda-2)$ (1)

Επειδη η f ειναι γνησιως φθινουσα στο $\mathbb{R}$ θα ειναι και 1-1 στο $\mathbb{R}$, αρα

(1) $\Leftrightarrow$ $\lambda^2-4=\lambda-2 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$ ή $\lambda=2$.

09

Δινεται η συναρτηση f με $f(x)=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)-2x(\ln x-1)$, $x>0$.

α) Να βρειτε την παραγωγο f΄ της f για καθε $x>0$.
β) Να μελετησετε τη συναρτηση f ως προς τη μονοτονια και τα τοπικα ακροτατα .

α)

$$f'(x)=\frac{x}{2}(2\ln x-1)+\frac{x^2}{4}2\frac{1}{x}-2(\ln x-1)-2x\frac{1}{x}=x\ln x-\frac{x}{2}+\frac{x}{2}-2\ln x+2-2=x\ln x-2\ln x=$$

$=(x-2)\ln x$, για καθε $x>0$.

β)

$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)\ln x=0 \Leftrightarrow (x-2=0$ ή $\ln x=0) \Leftrightarrow x=2$ ή $x=1$. Τα $x-2$, $\ln x$ ειναι ετεροσημα μονο στην περιπτωση $x\in(1,2)$. Το προσημο της f΄ φαινεται στον πινακα που ακολουθει :

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	
			τ.μ.		τ.ε.		

Η f ειναι γν. αυξουσα στα διαστηματα $(0,1)$, $(2,+\infty)$ και γν. φθινουσα στο $[1,2]$, ενω παρουσιαζει τοπικο μεγιστο στη θεση 1 το $f(1)=\frac{7}{4}$ και τοπικο ελαχιστο στη θεση 2 το $f(2)=3-2\ln 2$.

10

Δινεται η συναρτηση f με $f(x)=\begin{cases} x^3\cdot ημ\frac{1}{x} & ,αν\ x\neq 0 \\ 0 & ,αν\ x=0 \end{cases}$

α) Να αποδειξετε οτι η f ειναι παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$.
β) Να βρειτε την παραγωγο της f για καθε $x\in\mathbb{R}$.

α)

Για καθε $x\neq 0$ η $ημ\frac{1}{x}$ ειναι παραγωγισιμη ως συνθεση παραγωγισιμων συναρτησεων και συνεπως η $f(x)=x^3\cdot ημ\frac{1}{x}$ ειναι παραγωγισιμη ως γινομενο παραγωγισιμων συναρτησεων. Για το $x_o=0$ θα εργαστουμε με τον ορισμο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cdot ημ\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}(x^2\cdot ημ\frac{1}{x})=0,\ \text{γιατι:}$$

$$-1\leq ημ\frac{1}{x}\leq 1\Rightarrow -x^2\leq x^2\cdot ημ\frac{1}{x}\leq x^2\ \text{και}\ \lim_{x\to 0}(-x^2)=\lim_{x\to 0}x^2=0.$$

Αρα η f ειναι παραγωγισιμη στο $x_o=0$ με $f'(0)=0$.

β)

Για καθε $x\neq 0$ ειναι $f'(x)=(x^3)'\cdot ημ\frac{1}{x}+x^3\cdot(ημ\frac{1}{x})'=3x^2\cdot ημ\frac{1}{x}+x^3\cdot συν\frac{1}{x}\cdot(\frac{1}{x})'=$

$=3x^2\cdot ημ\frac{1}{x}+x^3\cdot συν\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})=3x^2\cdot ημ\frac{1}{x}-x\cdot συν\frac{1}{x}$. Αρα: $f(x)=\begin{cases} 3x^2ημ\frac{1}{x}-xσυν\frac{1}{x} & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$