01

Να υπολογισετε το εμβαδον του χωριου που περικλειεται μεταξυ της γραφικης παραστασης της f με $f(x)=x^2e^x$, τον αξονα x΄x και των ευθειων με εξισωσεις x=1 και x=3 .

Η f ειναι συνεχης στο [1,3] ως γινομενο συνεχων συναρτησεων και f(x)>0 για καθε $x\in[1,3]$.Το ζητουμενο εμβαδο ειναι:

$$E=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 x^2e^x dx=\int_1^3 x^2(e^x)'dx=[x^2e^x]_1^3-\int_1^3 (x^2)'e^x dx=[x^2e^x]_1^3-\int_1^3 2xe^x dx=$$

$$=[x^2e^x]_1^3-\int_1^3 2x(e^x)'dx=[x^2e^x]_1^3-[2xe^x]_1^3+\int_1^3 2e^x dx=[x^2e^x]_1^3-[2xe^x]_1^3+[2e^x]_1^3=$$

$$=(9e^3-e)-(6e^3-2e)+(2e^3-2e)=5e^3-e \quad \text{τ.μ.}$$

02

Δινεται η συναρτηση f με $f(x)=3x+\frac{1}{2x^2}$.

α) Να βρειτε τις ασυμπτωτες της γραφικης παραστασης της συναρτησης f .
β) Να υπολογισετε το εμβαδο Ε(α) του χωριου που περικλειεται μεταξυ της γραφικης παραστασης της f , της ευθειας με εξισωση y=3x και των ευθειων με εξισωσεις x=1 και x=α με α>1 .
γ) Να υπολογισετε το οριο του εμβαδου Ε(α) του ανωτερου χωριου οταν το α τεινει στο +∞.

α)

Η f εχει πεδιο ορισμου το $A=\mathbb{R}-\{0\}$ και ειναι συνεχης σε αυτο ως αθροισμα συνεχων συναρτησεων.

- Επειδη $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(3x)+\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x^2}=+\infty$ η C_f εχει κατακορυφη ασυμπτωτη την ευθεια x=0 (αξονας y΄y).
- Αναζητουμε τωρα οριζοντιες ή πλαγιες ασυμπτωτες, αρχικα στο +∞.

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{1}{2x^3}\right)=3+0=3 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(3x+\frac{1}{2x^2}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0.$$

Αρα η ευθεια $y=3x+0 \Leftrightarrow y=3x$ ειναι πλαγια ασυμπτωτη της C_f στο +∞.
Ομοια βρισκουμε οτι η y=3x ειναι πλαγια ασυμπτωτη της C_f και στο -∞.

β)

Επειδη η f ειναι συνεχης στο [1,α] και $f(x)-3x=\frac{1}{2x^2}>0$ για καθε $x\in[1,\alpha]$ το ζητουμενο εμβαδο ειναι

$$E(\alpha)=\int_1^\alpha (f(x)-3x)dx=\int_1^\alpha \frac{1}{2x^2}dx=\left[-\frac{1}{2x}\right]_1^\alpha=-\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) \text{ τ.μ..}$$

γ)

Ειναι $\lim_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right]=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}$.

03

Δινεται η συναρτηση g , η οποια ειναι ορισμενη στο $\mathbb{R}$, δυο φορες παραγωγισιμη σε αυτο και ισχυει οτι g(-1)=7. Αν f ειναι μια συναρτηση με $f(x)=3(x-2)^2g(2x-5)$, να αποδειξετε οτι η f ειναι δυο φορες παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ και να υπολογισετε την $f''(2)$.

Η g(2x-5) ειναι παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ ως συνθεση παραγωγισιμων συναρτησεων, επομενως η f(x) ειναι παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινομενο παραγωγισιμων συναρτησεων με

$f'(x)=[3(x-2)^2]'\cdot g(2x-5)+3(x-2)^2[g(2x-5)]'=$

$=6(x-2)(x-2)'g(2x-5)+3(x-2)^2g'(2x-5)(2x-5)'=$

$=6(x-2)g(2x-5)+6(x-2)^2g'(2x-5)$.

Η g'(2x-5) ειναι παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ ως συνθεση παραγωγισιμων συναρτησεων, αρα η f'(x) ειναι παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ ως αθροισμα γινομενων παραγωγισιμων συναρτησεων με

$f''(x)=[6(x-2)g(2x-5)]'+[6(x-2)^2g'(2x-5)]'=$

$=6g(2x-5)+6(x-2)g'(2x-5)(2x-5)'+12(x-2)g'(2x-5)+6(x-2)^2g''(2x-5)(2x-5)'=$

$=6g(2x-5)+12(x-2)g'(2x-5)+12(x-2)g'(2x-5)+12(x-2)^2g''(2x-5)$. Αρα

$f''(2)=6g(-1)+12(2-2)g'(-1)+12(2-2)g'(-1)+12(2-2)^2g''(-1)=6g(-1)+0+0+0=42$.

04

Θεωρουμε τη συναρτηση f με $f(x)=\frac{ax^3}{3}+(\frac{\beta}{2}+\delta)x^2+(\gamma-\delta)x+\delta$, οπου α, β, γ, δ ειναι πραγματικοι αριθμοι και ισχυει οτι $\frac{a}{3}+\frac{\beta}{2}+\gamma=0$. Να αποδειξετε οτι υπαρχει $\xi\in(0,1)$ τετοιο ωστε η εφαπτομενη της γραφικης παραστασης της f στο σημειο (ξ , f(ξ)) να ειναι παραλληλη προς τον x΄x .

- Η συναρτηση f ειναι συνεχης στο [0,1]
- Η συναρτηση f ειναι παραγωγισιμη στο (0,1) ως πολυωνυμικη .
- Ακομη f(0)=δ και $f(1)=\frac{a}{3}+\frac{\beta}{2}+\delta+\gamma-\delta+\delta=(\frac{a}{3}+\frac{\beta}{2}+\gamma)+\delta=\delta$, αφου $\frac{a}{3}+\frac{\beta}{2}+\gamma=0$.

  Επομενως f(0)=f(1).

Συμφωνα με το Θεωρημα του Rolle υπαρχει $\xi\in(0 , 1)$ τετοιο ωστε $f'(\xi)=0$, δηλαδη η εφαπτομενη της γραφικης παραστασης της f στο σημειο (ξ,f(ξ)) να ειναι παραλληλη προς τον αξονα x΄x .

05

Εστω α πραγματικος αριθμος και f η συναρτηση με

$$f(x)=\frac{x^4}{3}+\frac{2ax^3}{3}+(\alpha^2-2\alpha+\frac{5}{2})x^2+(\alpha^3+7)x-5\alpha^2 .$$

Να αποδειξετε οτι η γραφικη παρασταση της f δεν εχει σημεια καμπης .

Η f ως πολυωνυμικη ειναι 2 φορες παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ και επομενως για να αποδειξουμε οτι η γραφικη παρασταση της f δεν εχει σημεια καμπης, αρκει να δειξουμε οτι η $f''(x)=0$ δεν εχει ριζες στο $\mathbb{R}$. Ετσι:

$f'(x)=4\frac{x^3}{3}+2\alpha x^2+2(\alpha^2-2\alpha+\frac{5}{2})x+(\alpha^3+7)$,

$f''(x)=4x^2+4\alpha x+(2\alpha^2-4\alpha+5)$.

Αρκει να δειξουμε οτι η διακρινουσα $\Delta=(4\alpha)^2-4\cdot 4\cdot(2\alpha^2-4\alpha+5)$ ειναι αρνητικη. Πραγματι

$\Delta=16\alpha^2-16\cdot(2\alpha^2-4\alpha+5)=-16(\alpha^2-4\alpha+5)=-16(\alpha^2-4\alpha+4+1)=-16[(\alpha-2)^2+1]<0$